Calcolo Differenziale — *Test 6*

Corsi di Laurea in Informatica, a.a. 2013/14

Mettere una croce su vero o falso, lasciare in bianco se non si conosce la risposta.

Esercizio 1. Sia $f(x) = e^x - \sin(2x)$. Indichiamo con $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$ rispettivamente i polinomi di grado 1, 2 e 3 della funzione f di centro $x_0 = 0$

$P_3(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x^3$

i) $P_1(x) = 1 - x$ $\boxed{\times}$ $\boxed{F}$

ii) $P_1(x) = 1 + x$ $\boxed{V}$ $\boxed{\times}$

iii) $P_2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{F}$

iv) $P_2(x) = 1 - x - \frac{x^2}{2}$ $\boxed{V}$ $\boxed{\times}$

v) $P_3(x) - P_2(x) = \frac{x^3}{6}$ $\boxed{V}$ $\boxed{\times}$

Esercizio 2. Sia f derivabile 2 volte in $\mathbb{R}$ tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ e $f''(x) \le 2$ in $\mathbb{R}$. Allora si ha $f(x) \le x^2$.

$\boxed{\times}$ $\boxed{F}$ TAYLOR ORDINE RESTO ORDINE 2

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(c)x^2$ $\boxed{c \text{ TRA } 0 \text{ e } x}$ $\Rightarrow f(x) = f''(c)\,x^2 \le x^2$

Esercizio 3. Ricordiamo la definizione di infinitesimo di ordine superiore. Ovvero $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$ quando x tende ad x_0, se e solo se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Questo si scrive $f(x) = 0(g(x))$ per $x \to x_0$.

i) $\sin^2(x) = 0(e^x - 1)$ per $x \to 0$ $\boxed{\times}$ $\boxed{F}$

ii) $1 - \cos(x) = 0(x)$ per $x \to 0$ $\boxed{\times}$ $\boxed{F}$

iii) $\sqrt{x} - 1 = 0(x - 1)$ per $x \to 1$ $\boxed{V}$ $\boxed{\times}$

$\frac{\sin^2(x)}{e^x - 1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (HOPITAL AD ESEMPIO)

LIMITE DEL RAPPORTO NON È 0

Esercizio 4. i) $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{e^n} = 0$ $\boxed{\times}$ $\boxed{F}$

ii) $\lim_{n\to+\infty} n^2 \sin(\frac{1}{n}) = +\infty$ $\boxed{\times}$ $\boxed{F}$

iii) $\lim_{n\to+\infty} (1 - \cos(\frac{n\pi}{2}) = 0$ $\boxed{V}$ $\boxed{\times}$

SVOLTI IN AULA

Domande aperte

Esercizio 5. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 e centro $x_0 = 1$ della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$.

$f(0) = 1$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = +\frac{2}{x^3}$, $f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow P_3(x) = 1 + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$

$P_3(x) = 2 - x + (x-1)^2 - (x-1)^3$

Esercizio 6. Dimostrare che la successione $a_n = \frac{n+5}{n^2+11}$ è decrescente per $n \ge 1$.

SEGUE PAGINA DOPO

Esercizio 7. Usando gli sviluppi di Taylor si calcoli

$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))x^2}{(e^x-1)^4}. = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)x^2}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 8. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 1} \frac{2 - \sqrt{5-x}}{\sin(2\pi x)}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{x\pi}{2})}{e^x - e}.$$

HOPITAL $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{5-x}}}{2\pi\cos(2\pi x)} = \frac{1}{8\pi}$

HOPITAL $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 1} \frac{-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)}{e^x} = -\frac{\pi}{2e}$

Esercizio 9. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n)+5}{\sqrt{n}+2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sin(n), \qquad \lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{1}{2n}}-1\right)$$

$\rightsquigarrow$ VAR REALE

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{2x}}-1\right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y} \to \frac{1}{2}$$

$\to 0$

LIMITATO PER UNA SUCC CHE TENDE A 0

VARIABILE REALE

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)+5}{\sqrt{x}+2} = 0$$

$\to$ REGOLA HOPITAL

ES 6 SI PUO' VERIFICARE DIRETTAMENTE CHE $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \geq 1$ OPPURE CONSIDERARE LA FUNZIONE $f(x) = \frac{x+5}{x^2+11}$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2+11-2x(x+5)}{(x^2+11)^2} =$

$$= \frac{-x^2-10x+11}{(x^2+11)^2}$$

$x^2+10x-11=0 \iff x = -5 \pm\sqrt{25+11} = \left\langle\begin{matrix}1\\-11\end{matrix}\right.$

$\Rightarrow f'(x) < 0$ SE $x > 1$

f DECR. $\Rightarrow a_n$ DECR.