

Tutoraggio - Calcolo I (Derivate)

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni (nei loro domini di derivabilità)

a) $f(x) = \frac{x}{2+x}$, $f(x) = \frac{x(x+1)}{2x-3}$, $f(x) = \arctan(1-x^2)$.

b) $f(x) = |2-3x|$, $f(x) = |x-1| + |3-4x|$, $f(x) = xe^{|x-1|}$.

c) $f(x) = 2x - \ln(x^2 - 1)$, $f(x) = \sin(3x^3 + 4^x)$, $f(x) = e^x(1 + x^2 + 3x^7)$.

d) $f(x) = \sin(\pi^{\tan x})$, $f(x) = x \cdot \ln x \cdot \sin x$, $f(x) = e^{\sin(e^x)}$.

e) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+3}\right) e^{-\cos x}$, $f(x) = \ln(x + \sin(\ln x))$, $f(x) = \sin\left(\frac{\ln x}{x^3 + 4}\right)$.

2. Determinare (se esistono) due valori $a, b \in \mathbb{R}$ tali che risultino continue e derivabili le seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 3 & \text{se } x \geq 0 \\ 7e^x - 4 & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad k(x) = \begin{cases} 4a + b & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x(a+b) - 1} & \text{se } x < 1, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} ax - bx^2 & \text{se } x > 0 \\ a & \text{se } x = 0 \\ 1 - \cos x & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} bx & \text{se } x > 0 \\ a & \text{se } x = 0 \\ xe^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

3. Mostrare un esempio per ognuna delle seguenti affermazioni

a) Una funzione continua ma non derivabile in un punto

b) * Una funzione derivabile in un punto la cui derivata non è derivabile

c) Una funzione il cui limite del rapporto incrementale in un punto esiste ma non è finito

d) Una funzione il cui limite del rapporto incrementale in un punto non esiste

e) * Una funzione derivabile per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i cui limiti destro e sinistro della derivata esistono e sono uguali. Come si spiega?

4. * * Sia f una funzione definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Provare che f è costante.

5. * * Sia f una funzione *pari* e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. Provare che $f'(0) = 0$.