

Calcolo I - A.A. 2006/07

Foglio di Esercizi 12-10-2006

Esercizio 1. Determinare gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{\log(\sin(x) + \frac{1}{2})}, \frac{\arcsin(\sqrt{x-1})}{x}, \sqrt{\log_3(x+2) - \frac{1}{3}}.$$

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x \geq 2 \\ x+2 & \text{se } x < 2, \end{cases}$$

1. disegnare sugli assi cartesiani tale funzione;
2. disegnare le funzioni $g(x) = f(x-2)$ e $h(x) = f(x) - 4$,
3. dimostrare che la funzione f è iniettiva come funzione su tutto \mathbb{R} ,
4. determinare la funzione inversa di f .

Esercizio 3. Sia

$$f(x) = |3^x - 1|$$

definita su tutto \mathbb{R}

1. disegnare sugli assi cartesiani tale funzione;
2. quante soluzioni esistono dell'equazione $f(x) = \frac{1}{2}$, la funzione f è iniettiva?
3. trovare $\sup_{x \in \mathbb{R}} f$, $\inf_{x \in \mathbb{R}} f$.

Esercizio 4. Sia $A = \{\frac{n+1}{n+2} : n \in \mathbb{N}\}$. Determinare $\sup A$ ed $\inf A$ e dire se esistono il massimo e il minimo di A .

Esercizio 5. Sia $f(x) = 2^{\arccos(x)}$ determinare $\sup_{x \in [0,1]} f$ e $\inf_{x \in [0,1]} f$.

Esercizio 6. Dimostrare, usando il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Esercizio 7. Dimostrare, usando il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ si ha

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$