Calcolo I - A.A. 2006/07

Foglio di Esercizi 2-11-2006

Esercizio 1. Sia $f(x) = \frac{\log(1+y)}{|y|}$. Determinare l'insieme di definizione. Dire in quali punti f è continua. Studiare il tipo di discontinuità nei punti di accumulazione non appartenenti al dominio. Studiare se possibile i limiti a $+\infty$ e $-\infty$.

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} & se\, x < 0 \\ \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} & se\, x > 0, \end{cases}$$

discutere la discontinuità in $x = 0$.

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) + \sin(3x)}{\tan(x)}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 0} e^{\frac{1-\cos(2x)}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} e^x - x, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{2^x - x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \log(x) - x$$

$$\lim_{x\to 0} \sin(x)\log(x^2+x), \qquad \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x) - \sqrt{x}}{x^\alpha} \quad \text{(al variare di } \alpha \in \mathbb{R})$$

Esercizio 4. Sia $f(x) = \log(1 + x^2) + x$, dimostrare che esiste almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = -1$. Determinare un intervallo limitato in cui si trova una soluzione della precedente equazione.

Esercizio 5. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ definiamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(\alpha x)}{x} & se\, x < 0 \\ \frac{\sqrt{x+\alpha^2}-\alpha}{x} & se\, x > 0, \end{cases}$$

determinare α in modo che la funzione f sia estendibile per continuità in $x = 0$.

Esercizio 6. Sia $f(x) = |x^2 - 1| + x$. Dimostrare che esiste il minimo di f su tutto $\mathbb{R}$ e successivamente determinarlo.