

Calcolo I - A.A. 2006/07

Foglio di Esercizi 9-11-2006

Esercizio 1. Sia $f(x) = (x-2) \log(\frac{1}{x^2-4})$. Determinare l'insieme di definizione. Dire in quali punti f è continua. Studiare il tipo di discontinuità nei punti di accumulazione non appartenenti al dominio. Studiare se possibile i limiti a $+\infty$ e $-\infty$.

Esercizio 2. Per ogni coppia di costanti a e $b \in \mathbb{R}$ consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x < 0 \\ (a+x)^2 + x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- i) Determinare a e b in modo che la funzione f risulti continua in $\mathbb{R}$.
- ii) Determinare a e b in modo che la funzione f risulti derivabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sin(\pi x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\sin(\pi x)} - 1}{\sqrt{|x-1|}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sin(|x|))^{x^2}$$

Esercizio 4. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\sin(x)}{x^\alpha}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{\alpha x} + x}{3^{-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\alpha x)}{x^2}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\alpha x) \frac{x^\alpha}{2^x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log(1+x).$$

Esercizio 5. Determinare sup ed inf dei seguenti insiemi

$$A_1 = \{(-1)^n \frac{n+1}{n^2+2} : n \in \mathbb{N}\}, \quad A_2 = \{\frac{n^2+1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$$

e dire in quali casi questi valori sono anche max e min.

Esercizio 6. Consideriamo la funzione $f(x) = e^{\sin(\frac{x\pi}{2})}$. Determinare $f([0, 1])$. Dimostrare che la funzione f è invertibile in $[0, 1]$. Determinare la funzione inversa f^{-1} .

Esercizio 7. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta continua in 0 la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Per quali α la funzione f risulta derivabile in 0?

Esercizio 8. Calcolare, usando la definizione di limite del rapporto incrementale, la derivata di $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ in $x = 1$.

Esercizio 9. Calcolare, usando la definizione di limite del rapporto incrementale, la derivata di $f(x) = e^{x^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.