

Calcolo I - A.A. 2006/07

Foglio di Esercizi 30-11-2006

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{e^x - e}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{1/x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{e^{x^2} - e^{-x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x+3x^2) + x}{e^{2x} - 1}.$$

Esercizio 2. Determinare il max e il min della funzione $f(x) = x^3 + |x|$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 3. Sia $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$. Determinare l'insieme di definizione. Determinare eventuali simmetrie, periodicità. Studiare il segno. Calcolare i limiti agli estremi dell'insieme di definizione. Dire se ci sono asintoti. Determinare l'insieme di continuità e di derivabilità. Studiare crescita e decrescenza con eventuali massimi e minimi relativi. Studiare concavità e convessità con eventuali flessi. Disegnare il grafico.

Esercizio 4. Siano $f(x) = |x+2| + \frac{x+1}{x-3}$ e $g(x) = \frac{1}{\sin(x)} + \sqrt{2}x$. Studiare le funzioni f e g come nell'esercizio precedente, escluso lo studio del segno.

Esercizio 5. Sia $f(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 4)$. Studiare la funzione come nell'esercizio 3. Dimostrare che f è invertibile. Dopo aver osservato che $f(0) = 4$, calcolare la retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $x = 4$.

Esercizio 6. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ che ammetta derivata seconda in (a, b) . Supponiamo che esista $c \in (a, b)$ tale che $f(a) = f(c) = f(b)$. Dimostrare che esiste $d \in (a, b)$ tale che $f''(d) = 0$.

Esercizio 7. Quante soluzioni ammette l'equazione

$$\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x - 3 = 0?$$

E l'equazione

$$\frac{\sin^3(x)}{3} + \sin^2(x) + 2\sin(x) - 3 = 0?$$

Esercizio 8. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{x^3}{3} + x^2 + \alpha = 0.$$