

Calcolo I - A.A. 2006/07

Foglio di Esercizi 21-12-2006

Esercizio 1. Sia $f \in C^n(\mathbb{R})$. Indicato con $P_n(x)$ il polinomio di Taylor di grado n di centro l'origine di f . Si dimostri che $\tilde{P}_{n+1}(x) = \int_0^x P_n(t) dt$ è il polinomio di Taylor di grado $n+1$ della funzione integrale $\int_0^x f(t) dt$.

Esercizio 2. Si determini il polinomio di Taylor di grado 5 e centro 0 delle seguenti funzioni integrali

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt, \quad \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Esercizio 3. Usando gli sviluppi di Taylor calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - e^x + 1}{xe^x - \sin(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - x(e^x - 1)}{2 \log(1 + \frac{x}{2}) - \sin(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^4} + e^{-x^4} - 2}{x^2(\cos(x^3) - 1)}.$$

Esercizio 4. Dire se le seguenti serie numeriche divergono o convergono

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)},$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 6n + 1}{n^4 + 5n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + 2}{4^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Esercizio 5. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}} - \sin\left(\frac{1}{n}\right),$$

si dimostri che è a termini positivi e si dica se converge.

Esercizio 6. Si studi la convergenza delle seguenti serie al variare del parametro $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^\alpha + n^5}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n!}.$$

Esercizio 7. Sia $f(x) = \int_0^{3x} \frac{t^2}{\tan(t)} dt$. Si verifichi che la funzione è ben posta per x vicino a 0. Si determini l'insieme di definizione e si calcoli il seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos(\frac{x}{2})}.$$

Esercizio 8. Sia $f \in C(\mathbb{R})$ si verifichi che per ogni $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi+2\pi} f(\sin(x)) dx = \int_0^{2\pi} f(\sin(x)) dx.$$

Usando la precedente uguaglianza si dimostri che vale

$$\int_0^{2k\pi} f(\sin(x)) dx = k \int_0^{2\pi} f(\sin(x)) dx.$$

Esercizio 9. Si calcolino i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx, \quad \int e^{2x} x^2 dx, \quad \int \frac{1}{2x + \sqrt{3x+1}} dx.$$

Esercizio 10. Si calcolino i seguenti integrali definiti

$$\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3} dx, \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2(x)} dx, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx,$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+3} dx, \quad \int_0^2 \frac{1}{x^2-3x+2} dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{x^2 \sin(x)}{(x^2+1)^4} dx.$$

Esercizio 11. Si studi la seguente funzione integrale (escluso lo studio della convessità)

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{|t| + 2\cos(t) + 3} dt.$$

Esercizio 12. Sia $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x < 1 \\ \log(x) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. Consideriamo la funzione

integrale $h(x) = \int_0^x f(t) dt$. Dire in quali punti h ammette derivata prima e in quali ammette anche derivata seconda. Calcolare esplicitamente $h(x)$. Disegnare il grafico di h .

Esercizio 13. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}, \quad \cos(x) - \cos^2(x), \quad e^{8x-x^2-14}, \quad \log(x^2-1) + \frac{1}{x^2-1}.$$