Calcolo Differenziale – Prima prova in itinere 12/11/2013 $\boxed{\textbf{A}}$

COGNOME: ______________________ NOME: ______________________

Nei primi 3 esercizi mettete solo una croce su vero $\boxed{\text{V}}$ o falso $\boxed{\text{F}}$, nel caso vogliate cambiare la risposta utilizzate $\boxed{\text{v}}$ o $\boxed{\text{f}}$. In questo tipo di esercizi le risposte errate verranno penalizzate. Nelle domande aperte l'esercizio va svolto in modo completo, in particolare indicate nello svolgimento la parte di teoria che utilizzate.

Esercizio n. 1 – Sia $f(x) = \cos(x) - x$

i) f è invertibile nell'intervallo $[0, \pi]$ $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

ii) l'equazione $f(x) = 0$ ha soluzione nell'intervallo $[0, \pi]$ $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

iii) L'insieme $f(\mathbb{R})$ è limitato $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\cancel{\text{F}}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

Esercizio n. 2 – Considerare la funzione f definita definita su $\mathbb{R}$ da $f(x) = x\,[x]$.

i) la funzione f è crescente sull'intervallo $[0, +\infty)$ $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

ii) la funzione f è continua sull'intervallo $[0, +\infty)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\cancel{\text{F}}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

iii) la funzione f è dispari $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\cancel{\text{F}}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

Esercizio n. 3 – Sia f una funzione periodica di periodo 1 definita su $\mathbb{R}$.

i) la funzione $|f|$ è anch'essa periodica di periodo 1 $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

Siano f e g due funzioni definite su $\mathbb{R}$.

ii) f periodica di periodo 1, g periodica di periodo 2 implica $f + g$ periodica di periodo 1 $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\cancel{\text{F}}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

iii) f periodica di periodo 1, g periodica di periodo 1 implica fg periodica di periodo 1 $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

Domande aperte

ESERCIZIO 4 Calcolare il seguente limite $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 - x} - x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

SVOLGIMENTO

POSSIAMO CALCOLARE SEPARATAMENTE $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x} - x$ E $\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, USANDO LE REGOLE SUL LIMITE DEL PRODOTTO E OVVIAMENTE FACENDO ATTENZIONE CHE NON VENGA UNA FORMA INDETERMINATA, POICHE' $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ E $\cos(x)$ E' CONTINUA SI HA $\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos(0) = 1$

NELL'ALTRO CASO ABBIAMO UNA FORMA INDETERMINATA $\infty - \infty$, LA SVOLGIAMO NEL SEGUENTE MODO: $\frac{(\sqrt{x^2-x} - x)(\sqrt{x^2-x} + x)}{(\sqrt{x^2-x} + x)} = \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2-x} + x} = \frac{-x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}} + x} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}} + 1}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}} + 1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-x} - x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$

ESERCIZIO 5 Sia $f(x) = \frac{x^3}{4} + x + \sqrt{x}$. Determinare $f([0,4])$.

SVOLGIMENTO

OSSERVIAMO CHE f E' CONTINUA E CRESCENTE IN QUANTO SOMMA DI FUNZIONI CONTINUE E CRESCENTI, USANDO IL Th DI $\exists$ DEI VALORI INTERMEDI E IL FATTO CHE f È CRESCENTE POSSIAMO AFFERMARE CHE L'IMMAGINE DI UNA FUNZIONE CHE VERIFICA TALI PROPRIETA' IN UN INTERVALLO $[a,b]$ E' DATA DA $[f(a), f(b)]$ IN QUESTO CASO $f(0)=0$ $f(4)=22$ QUINDI $f([0,4]) = [0,22]$ (SE LA f NON FOSSE CRESCENTE O CONTINUA L'AFFERMAZIONE NON E' PIU' VALIDA IN GENERALE)

ESERCIZIO 6 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha x)}{x} + 2\alpha & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x+\alpha} & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

i) Dire per quali valori di α la funzione f è ben definita in $\mathbb{R}$.
ii) Dire per quali valori di α la funzione f è continua nel punto $x = 0$.

SVOLGIMENTO

i) PER $x<0$ NON CI SONO PROBLEMI LA FUNZIONE E' SEMPRE DEFINITA PER $x \geq 0$ DOBBIAMO ESSERE SICURI CHE $x+\alpha \geq 0$ PER OGNI $x \geq 0$, QUESTO SARA' VERO $\Leftrightarrow$ $\alpha \geq 0$, LA RISPOSTA $\alpha \geq -x$ E' PRIVA DI SENSO, x E' UN'INCOGNITA E NOI DOBBIAMO DARE UNA RISPOSTA CHE SIA VALIDA PER OGNI VALORE DELL'INCOGNITA, QUINDI $\alpha \geq 0$ E' LA RISPOSTA CORRETTA

ii) AFFINCHE' f SIA CONTINUA IN $x=0$ DOBBIAMO AVERE $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \sqrt{\alpha}$, POICHE' LA FUNZ. E' DEFINITA IN MODO DIVERSO A SINISTRA E A DESTRA DI 0 DOBBIAMO FARE I 2 LIMITI E IMPORRE CHE SIANO UGUALI A $\sqrt{\alpha}$. OVVIAMENTE $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x+\alpha} = \sqrt{\alpha}$ PER LA CONTINUITA' DELLA FUNZ $\sqrt{x}$

MENTRE $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \cdot \alpha + 2\alpha = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$ $\left[\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1\right]$

f CONTINUA $\Leftrightarrow$ $\sqrt{\alpha} = 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = 9\alpha^2$ $\Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = \frac{1}{9}$