Seconda prova in itinere del corso di Calcolo I A.A. 2006/07

19-01-2007

Esercizio 1. Data la funzione $f(x) = \log(\frac{x^2}{x+1}) - x$, determinare il dominio di definizione, fare i limiti agli estremi del dominio, determinare eventuali asintoti. Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione. Studiare crescenza e decrescenza con eventuali massimi e minimi relativi. Studiare concavità e convessità con eventuali flessi. Disegnare il grafico. (Facoltativo) Quante soluzioni ammette l'equazione $f(x) = 0$?

Esercizio 2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log(1+\frac{1}{n})}.$$

Studiare la convergenza della seguente serie al variare del parametro $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 - \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Studiare la convergenza della seguente serie al variare del parametro $x < \frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-3x)^n}{n+1}.$$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti integrali

$$\int_1^e \frac{\log(x)}{x^2}\,dx, \qquad \int \frac{x^3}{x^2+7x+12}\,dx.$$

Esercizio 4. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ consideriamo la funzione

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1-e^t}{t} & se\ t \neq 0 \\ a & se\ t = 0. \end{cases}$$

Determinare a in modo che la funzione f sia continua in tutto $\mathbb{R}$. Per tale valore di a si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Si dimostri che la funzione F ammette derivata seconda in $x = 0$ e si determini per tale funzione il polinomio di Taylor di grado 2 e centro $x = 0$.