Calcolo Differenziale – Seconda prova in itinere 15/01/2014 **B**

COGNOME: ________________ NOME: ________________

Nei primi 4 esercizi mettete solo una croce su vero V o falso F, nel caso vogliate cambiare la risposta utilizzate v o f. In questo tipo di esercizi le risposte errate verranno penalizzate. Nelle domande aperte l'esercizio va svolto in modo completo, in particolare indicate nello svolgimento la parte di teoria che utilizzate.

Esercizio n. 1 – Siano f e g convesse in un intervallo (a, b)

i) La funzione $f + g$ è convessa in (a, b) ~~V~~ F v f

ii) La funzione $f - g$ è concava in (a, b) V ~~F~~ v f

iii) Supponiamo che esista f'' in (a, b), allora la funzione $e^{f(x)}$ è convessa in (a, b) ~~V~~ F v f

Esercizio n. 2 – Sia $f(x) = |x|e^x$

i) f è derivabile nell'intervallo $(-1, 1)$ V ~~F~~ v f

ii) f ammette minimo assoluto nell'intervallo $(-1, 1)$ ~~V~~ F v f

iii) f ammette punti critici nell'intervallo $(-1, 1)$ V ~~F~~ v f

Esercizio n. 3 – Sia $f(x) = \frac{1}{x} + \log(x)$

i) la funzione f ammette asintoto verticale in $x = 0$ ~~V~~ F v f

ii) f ammette punto di max o min relativo nel suo insieme di definizione ~~V~~ F v f

iii) f ammette ammette almeno un punto di flesso nel suo insieme di definizione ~~V~~ F v f

Esercizio n. 4 – Sia f una funzione continua in $[a, b]$ allora $f(b) = \max_{[a,b]} f$ se e solo se f è non decrescente V ~~F~~ v f

Domande aperte

ESERCIZIO 5 Sia $f(x) = \log(|x-1|) + x$. Determinare l'insieme di definizione, l'insieme di derivabilità. Determinare eventuali max e min relativi. Determinare gli insiemi di concavità e convessità della funzione f. **SVOLGIMENTO**

D_f E' DATO DALLE X t.c. $|X-1| > 0 \Rightarrow X \neq 1$

QUINDI $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ QUESTO COINCIDE CON IL DOMINIO IN CUI E' DERIVABILE

$f'(x) = \frac{\operatorname{sg}(x-1)}{|x-1|} + 1 = \frac{1}{x-1} + 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} > -1$

SE $x > 1 \Rightarrow 1 > 1-x \Rightarrow x > 0$ QUINDI $f' > 0$ IN $(1, \infty)$

SE $x < 1 \Rightarrow 1 < 1-x \Rightarrow x < 0 \Rightarrow$ IN $(-\infty, 0)$ f CRES.
IN $(0, 1)$ f DECR

$\Rightarrow x = 0$ E' UN PUNTO DI MAX RELATIVO (E' L'UNICO!)

$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow$ IN $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ f E' CONCAVA

f NON E' MAI CONVESSA

ESERCIZIO 6 Sia $f(x) = 2e^x - \cos(x) - 2$. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ in $[0, +\infty]$

SVOLGIMENTO

$f(0) = 2-1-2 < 0$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ PER IL TH DI $\exists$ DEGLI ZERI ESISTE ALMENO UN PUNTO IN CUI $f(x)=0$

PER VEDERE SE È UNICO CONSIDERIAMO $f'(x)$

$f'(x) = 2e^x + \sin(x) \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1$ QUINDI $f'(x) \geq 2 + \sin(x)$

$\Rightarrow f'(x) \geq 2 - 1 = 1 \Rightarrow f$ CRESC. ALLORA LA SOLUZ DELL'EQ È UNICA

ESERCIZIO 7 Fornire un esempio di una funzione non necessariamente continua tale che: $f(x) \geq 0$, $\max_{\mathbb{R}} f = f(0) = 3$, $\lim_{x \to \pm\infty} f = 0$.

SVOLGIMENTO

ESEMPIO $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{SE } x \in [-1,1] \\ \frac{3}{|x|} & \text{SE } x < -1 \text{ O } x > 1 \end{cases}$

$\max f = f(0) = 3$

$f > 0$ E $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$