Calcolo Differenziale – Prima prova in itinere 07/11/2014 $\boxed{\textbf{A}}$

COGNOME: ____________________ NOME: ____________________

Nei primi 3 esercizi mettete solo una croce su vero $\boxed{V}$, falso $\boxed{F}$ o $\boxed{?}$. In questo tipo di esercizi le risposte errate verranno penalizzate. Nelle domande aperte l'esercizio va svolto in modo completo, in particolare indicate nello svolgimento gli argomenti di teoria utilizzati.

Esercizio n. 1 – Siano f e g funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$. Supponiamo che f e g siano funzioni dispari

i) La funzione $g(f(x))$ è pari $\boxed{V}$ $\cancel{\boxed{F}}$ $\boxed{?}$

ii) La funzione $f(g(x))$ è dispari $\cancel{\boxed{V}}$ $\boxed{F}$ $\boxed{?}$

Esercizio n. 2 – Sia $f(x) = x^3 - \cos(x) - 3$

i) L'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno 1 soluzione in $(0, +\infty)$ $\cancel{\boxed{V}}$ $\boxed{F}$ $\boxed{?}$

ii) L'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione in $[0, 1]$ $\boxed{V}$ $\cancel{\boxed{F}}$ $\boxed{?}$

Esercizio n. 3 –

i) La funzione $f(x) = \frac{x^2+5}{1+2x^2} - \frac{3\cos x}{x}$ verifica $f(x) \geq 0$ per $x > 0$ sufficientemente grande $\cancel{\boxed{V}}$ $\boxed{F}$ $\boxed{?}$

ii) Sia $f(x) \geq \frac{x^2+1}{x+3}$ per ogni $x \geq 0$ allora $\lim_{x\to\infty} f(x) - x = +\infty$ $\boxed{V}$ $\cancel{\boxed{F}}$ $\boxed{?}$

Domande aperte

ESERCIZIO 4 Sia f la funzione definita in tutto $\mathbb{R}$ nel modo seguente

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \leq 0 \\ Ax^2 + Bx + C & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

i) Dire per quali valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ la funzione risulta continua in $x = 0$.

ii) Calcolare $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h}$ e $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h}$ e determinare valori di A, B, C per i cui i due limiti coincidono.

iii) Dire per quali valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ la funzione risulta derivabile in $x = 0$.

SVOLGIMENTO

i) f È SICURAMENTE CONTINUA IN $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

AFFINCHÉ SIA SIA CONTINUA IN $x=0$ DOBBIAMO AVERE

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \rightsquigarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} Ax^2 + Bx + C = C \quad \text{QUINDI} \quad C = 0!$$

SE $A, B \in \mathbb{R}$, $C = 0$ LA FUNZ. f RISULTA CONTINUA IN $\mathbb{R}$

ii) $$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{Ah^2+Bh+C}{h} = \lim_{h\to 0^+} Ah + B + \frac{C}{h} = \begin{cases} B & \text{SE } C=0 \\ +\infty & \text{SE } C>0 \\ -\infty & \text{ - . . } C<0 \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \quad \text{(LIMITE NOTEVOLE)}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} \iff C = 0 \text{ e } B = 1$$

iii) AFFINCHÉ f SIA DERIVABILE DEVE ESSERE CONTINUA PER CUI $C=0$ PER IL PUNTO i) $\Rightarrow f(0)=0$

QUINDI NEL PUNTO ii) QUANDO $C=0$ ABBIAMO CALCOLATO I LIMITI INCREMENTALI $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ e $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$

f È DERIVABILE SE COINCIDONO OVVERO $\beta=1$. QUINDI f DERIV. $\Leftrightarrow$ $C=0$ e $\beta=1$

ESERCIZIO 5 Sia $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x+2}$.

i) Determinare l'insieme di definizione e l'insieme di continuità della funzione f;

ii) Calcolare, usando la definizione (limite del rapporto incrementale) $f'(0)$;

iii) Determinare l'insieme di derivabilità di f e calcolare $f'(x)$ per tutti i valori di x in cui essa risulta derivabile.

i)

L'INSIEME DI DEFINIZIONE È DATO DA $\begin{cases} x+4\geq 0 \\ x+2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow [-4,\infty)\setminus\{-2\}$

IN QUESTO INSIEME f È CONTINUA IN QUANTO IL NUM. È CONTINUO COME COMPOS. DI FUNZ. CONTINUE E IL DENOM È CONTINUO.

ii) $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ $\qquad f(0) = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{h+4}}{h+2} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+4}-h-2}{(h+2)h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+4}-2}{(h+2)h} - \frac{1}{h+2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+4}-2)(\sqrt{h+4}+2)}{(h+2)h(\sqrt{h+4}+2)} - \frac{1}{h+2} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{(h+2)\cancel{h}(\sqrt{h+4}+2)} - \frac{1}{h+2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{3}{8}$$

iii) $\sqrt{y}$ È DERIV. PER $y>0$ QUINDI $\sqrt{x+4}$ È DERIV SE $x>-4$

$x+2$ È SEMPRE DERIV. PER IL TH DI DERIV. DEL RAPPORTO DI FUNZ. DERIVABILI SAPPIAMO CHE f È DERIV. IN $(-4,+\infty)\setminus\{-2\}$

INOLTRE SI HA LA FORMULA

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\cdot(x+2) - \sqrt{x+4}}{(x+2)^2} = \frac{x+2-2x-8}{2(x+2)^2\sqrt{x+4}} = \frac{-x-6}{2(x+2)^2\sqrt{x+4}}$$

OSSERVIAMO $f'(0) = \frac{-6}{2\cdot 4\cdot 2} = -\frac{3}{8}$ COME IN ii) !