Calcolo Differenziale – Prima prova in itinere 07/11/2014 $\boxed{\textbf{B}}$

COGNOME: ____________________ NOME: ____________________

Nei primi 3 esercizi mettete solo una croce su vero $\boxed{\text{V}}$, falso $\boxed{\text{F}}$ o $\boxed{?}$. In questo tipo di esercizi le risposte errate verranno penalizzate. Nelle domande aperte l'esercizio va svolto in modo completo, in particolare indicate nello svolgimento gli argomenti di teoria utilizzati.

Esercizio n. 1 – Siano f e g funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$. Supponiamo che f e g siano funzioni dispari

i) La funzione $g(f(x))$ è pari $\boxed{\text{V}}$ $\cancel{\boxed{\text{F}}}$ $\boxed{?}$

ii) La funzione $f(g(x))$ è pari $\boxed{\text{V}}$ $\cancel{\boxed{\text{F}}}$ $\boxed{?}$

Esercizio n. 2 – Sia $f(x) = x^3 + \sin(x) - 4$

i) L'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione in $[0, 1]$ $\boxed{\text{V}}$ $\cancel{\boxed{\text{F}}}$ $\boxed{?}$

ii) L'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno 1 soluzione in $(0, +\infty)$ $\cancel{\boxed{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{?}$

Esercizio n. 3 –

i) La funzione $f(x) = \frac{5\sin(x)}{x} - \frac{x^2+5}{1+2x^2}$ verifica $f(x) \le 0$ per $x > 0$ sufficientemente grande $\cancel{\boxed{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{?}$

ii) Sia $f(x) \ge \frac{x^3+1}{x+2}$ per ogni $x \ge 0$ allora $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - x^2 = +\infty$ $\boxed{\text{V}}$ $\cancel{\boxed{\text{F}}}$ $\boxed{?}$

Domande aperte

ESERCIZIO 4 Sia f la funzione definita in tutto $\mathbb{R}$ nel modo seguente

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \ge 0 \\ Cx^3 + Bx + A & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

i) Dire per quali valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ la funzione risulta continua in $x = 0$.

ii) Calcolare $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h}$ e $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h}$ e determinare valori di A, B, C per i cui i due limiti coincidono.

iii) Dire per quali valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ la funzione risulta derivabile in $x = 0$.

SVOLGIMENTO

i) $A=0$ VEDI SOLUZ ESONERO A

ii) $A=0$ $B=1$ VEDI SOLUZ. ES. A

iii) -

.

ESERCIZIO 5 Sia $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+4}}$.

i) Determinare l'insieme di definizione e l'insieme di continuità della funzione f;

ii) Calcolare, usando la definizione (limite del rapporto incrementale) $f'(0)$;

iii) Determinare l'insieme di derivabilità di f e calcolare $f'(x)$ per tutti i valori di x in cui essa risulta derivabile.

i) $D_f = (-4, \infty)$ CONTINUA IN $(-4, \infty)$ VEDI MOTIVAZIONI NEL COMPITO A

ii) $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ $\quad f(0) = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h+2}{\sqrt{h+4}} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h+2-\sqrt{h+4}}{h\sqrt{h+4}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h+4}} + \frac{2-\sqrt{h+4}}{h\sqrt{h+4}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h+4}} + \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{h+4}\,(2+\sqrt{h+4})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h+4}} - \frac{1}{\sqrt{h+4}\,(2+\sqrt{h+4})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

iii) L'INSIEME DI DERIVABILITA' E' $(-4, \infty)$ VEDI SOLUZ A

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+4} - \frac{x+2}{2\sqrt{x+4}}}{x+4} = \frac{2(x+4) - x - 2}{2(x+4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x+6}{2(x+4)^{\frac{3}{2}}}$$

PROVA PUNTO ii) $f'(0) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$