

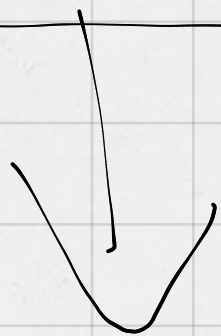
CALCOLO DIFFERENZIALE

ANALISI MATEMATICA $\rightarrow$ CONCETTO
DI LIMITE

NUMERI REALI $\mathbb{R}$

LINGUAGGIO TEORIA DEGLI INSIEMI

USO DELLE PROPOSIZIONI



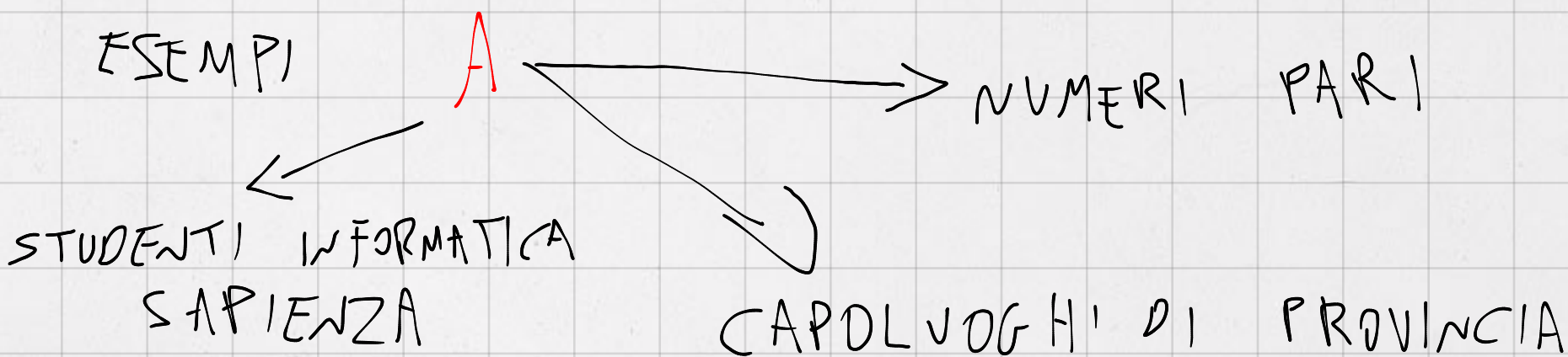
MATEMATICA

MODERNA

TEORIA DEGLI INSIEMI

A COLLEZIONE DI OGGETTI

ESEMPI



SIMBOLOGIA

$x \in A$ x APPARTIENE ALL'INSIEME A

$B \subset A$ L'INSIEME B E' CONTENUTO IN A

$A \cup B$ UNIONE DEI 2 INSIEMI

$A \cap B$ INTERSEZIONE DEI 2 INSIEMI

$\emptyset$ INSIEME VUOTO

SE A VIVE IN UN DETERMINATO SPAZIO PIU' GRANDE X :

A^c COMPLEMENTARE DI A , GLI ELEMENTI DI X ESCLUSI QUELLI DI A

IN GENERALE DATI 2 INSIEMI A e B

$B \setminus A$ E' L'INSIEME DI TUTTI GLI ELEMENTI DI B CHE NON SI TROVANO IN A

A NUMERI PARI

B NUMERI MULTIPLI DI 3

$$B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, \dots\}$$

SE PENSIAMO A E B DENTRO

L'INSIEME X DEI NUMERI INTERI

(N INTERI $\{0, 1, 2, \dots\}$)

$$A^c = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \text{ NUMERI DISPARI}$$

$$B^c = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$$

PROPOSIZIONI $\rightarrow$ LOGICA

P PROPOSIZIONE $\begin{cases} \text{VERA} \\ \text{FALSA} \end{cases}$

ROMA E' BELLA NON E' UNA PROPOSIZ.

ROMA HA PIU' DI 3.000.000 DI ABITANTI

INVECE SI

LUCA... E' PIU' ALTO DI GIORGIO...

E' UNA PROPOSIZIONE

LUCA... E' ALTO INVECE NO!!

LINGUAGGIO MATEMATICO TEOREMI, COROLLARI
etc. FA USO DI PROPOSIZIONI

SPESSO SI VUOLE DIMOSTRARE CHE

UNA DETERMINATA COSA SIA VERA O FALSA

DATE 2 PROPOSIZIONI SE NE PUO'

CREARE UNA TERZA

P e Q PROPOSIZIONI

$P \Rightarrow Q$ NUOVA PROPOSIZIONE

$P \Rightarrow Q$ SIGNIFICA CHE SE È VERA
LA PROPOSIZIONE P ALLORA DEVE ESSERE
VERA LA PROPOSIZIONE Q

QUINDI LA PROP. $R \leadsto P \Rightarrow Q$

RISULTA VERA QUANDO È VERO CHE
 $P \text{ VERA} \Rightarrow Q \text{ VERA}$

ESEMPIO

P $\times$ È UN NUMERO MULTIPLIO DI 4

Q $\times$ È UN NUMERO MULTIPLIO DI 2

$P \Rightarrow Q$ È VERA

$Q \Rightarrow P$ È FALSA, PERCHÉ ESISTONO

MULTIPLI DI 2 CHE NON SONO MULTIPLI
DI 4.

SPESSO I TEOREMI SONO PROPRIO
FORMULATI TRAMITE PROPOSIZIONI

$P \Rightarrow Q$

P È L'IPOTESI

Q È LA TESI

IN ALTRE PAROLE UN TEOREMA
CI DICE CHE SOTTO OPPORTUNE
CONDIZIONI (IPOTESI) SI HA UNA
DETERMINATA CONCLUSIONE (TESI)

ESEMPIO

① I MULTIPLI DI 4 SONO MULTIPLI DI 2

(PARANALE)

② SE UN TRIANGOLO E' RETTANGOLO ALLORA
LA SOMMA DEI QUADRATI COSTRUITI SUI
CATETI E' UGUALE AL QUADRATO COSTRUITO
SULL'IPOTENUSA (TH DI PITAGORA)

L'AFFERMAZIONE $P \Rightarrow Q$ OVVERO

P VERA $\Rightarrow Q$ VERA

E' EQUIVALENTE ALL'AFFERMAZIONE

Q FALSA $\Rightarrow P$ FALSA (DIMOSTR. PER ASSURDO)

IN GENERALE INVECE NO / ESISTE

LEGAME CON $Q \Rightarrow P$

SE SI HA CONTEMPORANEAMENTE

$P \Rightarrow Q$ E $Q \Rightarrow P$ SI SCRIVE $P \Leftrightarrow Q$

$P \Leftrightarrow Q$ SIGNIFICA CHE LE 2 PROP.
SONO EQUIVALENTI

OVVERO P E' VERA SE E SOLO SE E'
VERA Q .

P $\times$ E' MULTIPLO DI 6

Q $\times$ E' MULTIPLO DI 2 E DI 3

$P \Leftrightarrow Q$

DOMANDE VERO O FALSO NELLA

PROVA SCRITTA DOVETE DIRE SE
UNA DETERMINATA PROPOSIZIONE E' VERA
O FALSA

ES $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x+1} = 2$ V $\vee$ F

OPPURE

SE $x \leq 1$ E' VERO CHE $x^2 \leq 1$ V $\vee$ F

NUMERI

$\mathbb{N}$ NATURALI $0, 1, 2, 3, \dots$ CONTARE

SOMMA E PRODOTTO

PROPRIETÀ COMMUTATIVA E ASSOCIATIVA

$$a + b = b + a \quad (a \cdot b = b \cdot a)$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad ((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$$

PROPR. DISTRIBUTIVA

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{DIFFERENZA TRA LE
2 OPERAZIONI}$$

0 ELEMENTO NEUTRO DELLA SOMMA

$$0 + x = x \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad (\forall \text{ PER OGNI})$$

1 ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO

$$1 \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

LIMITAZIONI

DATI Q e $b \in \mathbb{N}$

ESISTE C TALE CHE $Q + C = b$

IN PRATICA (C) E' LA SOTTRAZIONE
NON SEMPRE SI TROVA. DEVE ESSERE
 b PIU' GRANDE DI Q

INTRODUZIONE DEI NUMERI OPPOSTI
 $-1, -2, -3, \dots$

$$b = 0 \quad Q = 3 \quad C = -3 \quad Q + C = 0$$

HO AGGIUNTO A FORZA DEI NUMERI
OVVERO QUELLI CHE AGGIUNTI AGLI INTERI
DANNO ZERO.

IN QUESTO MODO POSSO SEMPRE
TROVARE C TALE CHE $Q + C = b$

$$C = b + (-Q) \quad \text{INFATTI}$$

$$Q + b + (-Q) = Q + (-Q) + b = 0 + b = b$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

NUMERI RELATIVI

HO 100 EURO IN BANCA E NE HO
SPESI 200 QUANTI ME NE RIMANGONO?

-100

PROBLEMA ANALOGO CON LA MOLTIPL.

DATI Q e b ESISTE C t.c.

$$Q \cdot C = b \rightarrow \text{CONCETTO DI DIVISIONE}$$

ANCHE IN QUESTO CASO PER RISOLVERE

IL PROBLEMA E' SUFF. INTRODURRE

1 RECIPROCI, OVVERO 1 NUMERI

$$Q^{-1} \text{ o } \frac{1}{Q} \text{ OVVERO } Q \cdot Q^{-1} = 1$$

QUINDI DATO Q INTRODUCO Q^{-1} IL NUMERO
CHE MOLTIPLICATO PER Q MI DA 1

$$1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow \frac{1}{2}, 3 \rightarrow \frac{1}{3} \dots$$

A QUESTO PUNTO

$$\text{DATI } Q \text{ e } b \text{ SCEGLIO } C = Q^{-1} \cdot b \text{ o } \frac{1}{Q} \cdot b$$

$$\text{AVRO' } Q \cdot C = Q \cdot Q^{-1} b = b$$

L'UNICO NUMERO PER CUI NON

POSSO INTRODURRE IL RECIPROCO

È 0. SE $\exists$ (ESISTESSE, $\exists$ ESISTE)
 0^{-1} SI AVREBBE

$$0 \cdot 0^{-1} = 1 \Rightarrow (0+0)0^{-1} = 00^{-1} + 0 \cdot 0^{-1} = 1+1$$

ASSURDO $1=2$

NUMERI RAZIONALI

$$\mathbb{Q} = \{q \cdot b^{-1}, q \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

$q \cdot b^{-1} = \frac{q}{b}$ LASCIANDO LE PROP. COMM., ASSOC.
E DISTR. SI HA CHE

$$\frac{qc}{bc} = \frac{q}{b} \quad \text{OVVERO} \quad q \cdot c \cdot (b \cdot c)^{-1} = q \cdot b^{-1}$$

$$\frac{q}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{q \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{q}{b} + \frac{c}{d} = \frac{qd + cb}{b \cdot d}$$

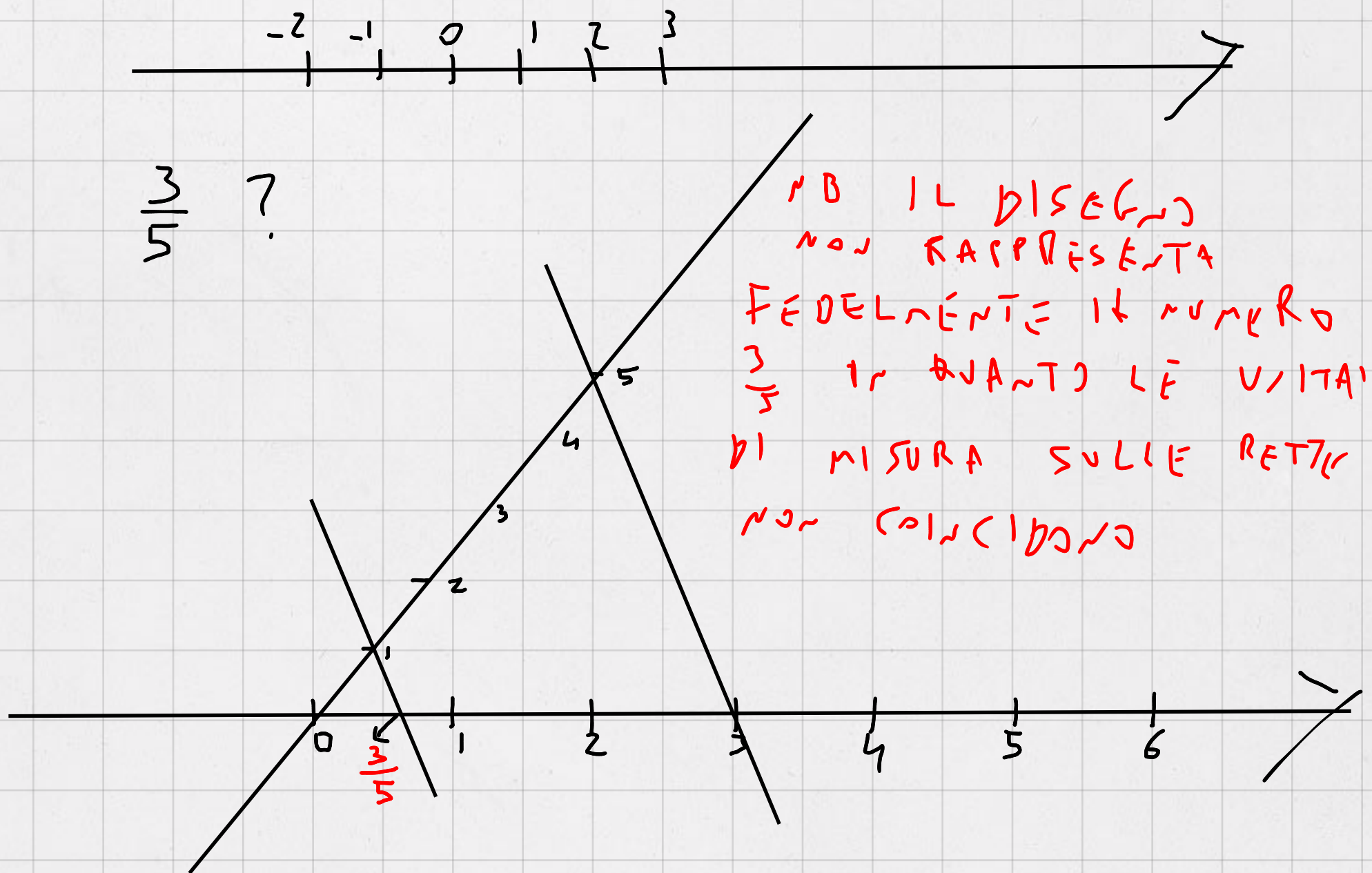
I NUMERI RAZIONALI SONO RICCHI

SONO UTILI PER MISURARE LE COSE

CON FRAZIONI ACCURATEZZA PER APPROSSIMARE
DIVERSE GRANDEZZE

SIANO, ESSE DISTANZE, ALTE, MISURE DI PESO
II CAPACITÀ

RETTEA REALE E NUMERI



DIVISIONE E SCRITTURA DECIMALE

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{2}{5} = 0,4 \quad \frac{1}{3} = 0,333 \dots = 0,\overline{3}$$

COSA SIGNIFICA?

SI MISURA IN DECIMI, CENTESIMI, MILLESIMI
... DI UNITÀ

NUMERI RAZIONALI $\mathbb{Q}$ $q \in \mathbb{Q}$

$$q = m, d_1 d_2 d_3 \dots d_p d_{p+1} d_{p+2} \dots d_{p+m}$$

$d_1 d_2 \dots d_p$ ANTIPERIODO

$d_{p+1} \dots d_{p+m}$ PERIODO

$$5, 734 \overline{154} = 5, 734 154 154 154 154 \dots$$

USARE LA RETTA PER MISURARE

ORDINE DEI RAZIONALI

$$a \leq b : \Leftrightarrow (\text{DEFINIZIONE}) \quad b - a \geq 0$$

OVVERO $b + (-a)$ E' UN NUMERO NON NEGATIVO, OVVERO ALCA DESTRA DELL' ORIGINE 0.

DEVE VALERE

$$a \geq 0 \text{ e } b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0$$

$$a \leq 0 \text{ e } b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \leq 0$$

$$a \geq 0 \text{ e } b \leq 0 \Rightarrow a \cdot b \leq 0$$

$$a \leq 0 \text{ e } b \leq 0 \Rightarrow a \cdot b \geq 0$$

LA PRIMA SEGUE DALLA DEFINIZIONE

LA SECONDA?

$$a \leq 0 \quad b \geq 0$$

$$a \leq 0 \Rightarrow -a \geq 0 \Rightarrow (-a) \cdot b \geq 0$$

$$\text{MA } (-a) \cdot b = -ab \Rightarrow -ab \geq 0$$

$$\Rightarrow ab \leq 0$$

PROVATE A FARE LA QUARTA

TUTTE LE COSE DETTE SI POSSONO
SCRIVERE NEL CASO "<" e ">"

OVVERO MINORE E MAGGIORE

STRETTO (SINISTRA E DESTRA DI
0 ESCLUSO LO ZERO)

ALTRE CONSEGUENZE

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$\forall c \geq 0 \quad a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$$

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

$$0 \cdot b = 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

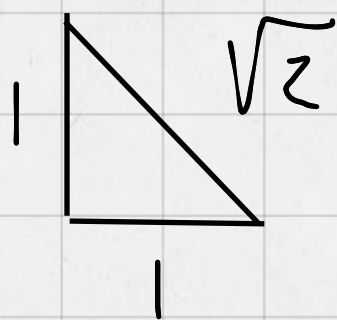
$$0 \cdot b = (0+0)b = 0 \cdot b + 0 \cdot b \Rightarrow 0 = 0 \cdot b$$

$$a \cdot b = 0 \quad \text{se } a \neq 0 \exists a^{-1}$$

$$\Rightarrow a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0 = 0 \Rightarrow 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$$

LO SPAZIO DEI RAZIONALI È RICCO!
 È SUFFICIENTE PER MISURARE ESATTAMENTE?
 IN ALTRE PAROLE $\mathbb{Q}$ CORRISPONDE ALLA
 RETTA?

NO!!!



$\sqrt{2} \rightarrow$ ovvero UN NUMERO
 CHE MOLTIPLICATO
 PER SE STESSO VALE
 2 !

SULLA RETTA POSSO RIPORTARE CON
 UN COMPASSO L'IPOTENUSA DI QUEL
 TRIANGOLO MA $\exists$ UN RAZIONALE
 CHE MOLTIPLICATO PER SE STESSO
 FA 2 !

NO!

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

$$\exists q = \frac{m}{n} \text{ t.c. } \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \quad m \text{ e } n \text{ INTERI}$$

PER LE PROPRIETÀ DEI RAZIONALI
POSSIAMO SCEGLIERE m e n IN MODO
CHE NON ABBIANO FATTORI COMUNI

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \quad \text{OVVERO } m \text{ È}$$

$$\text{PARI} \Rightarrow m = 2p \Rightarrow 4p^2 = 2n^2 \Rightarrow$$

$$m^2 = 2p^2 \Rightarrow m \text{ PARI} \quad \text{ASSURDO PERCHÉ}$$

m e n NON AVREBBERO FATTORI COMUNI

CONCLUSIONE I RAZIONALI NON BASTANO
PER MISURARE NON CORRISPONDONO ALLA

RETTA $\rightarrow$ NUMERI REALI

$\mathbb{R} \rightarrow$ USANDO LA RAPPRESENTAZIONE
DECIMALE SI POSSANO SCRIVERE COME

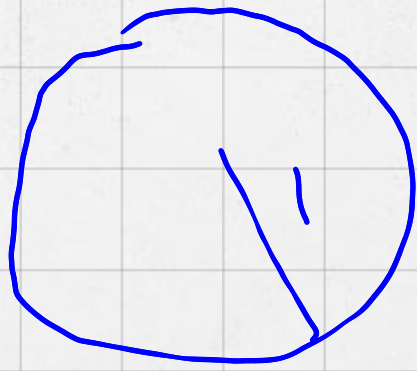
$m, d_1 d_2 \dots$ SOLO CHE A DIFFERENZA
DEI RAZIONALI NON E' DETTO CHE AD
CERTO PUNTO LE CIFRE SI RIPETANO
OVVIAMENTE $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ MA ESISTONO
ELEMENTI COME $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ MA $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

E' DIFFICILE CAPIRE VERAMENTE

BENE I REALI I QUALI HANNO
OVVIAMENTE TUTTE LE PROPRIETA' ALGEBRICHE
E DI ORDINE DEI RAZIONALI

E QUALCOSA IN PIU'..... DUE QUALCOSA
CHE LI RENDE ESTREMAMENTE PIU' RICCHI
E CI PERMETTE DI FARE IL CALCOLO

"DIFFERENZIALE"



MISURA DEL PERIMETRO
DELLA CIRCONFERENZA
DI RAGGIO 1 $\hat{=}$ 2π

$$\pi = 3,1415926 \dots$$

ALTRO NUMERO IMPORTANTE $\hat{=}$ e

IL NUMERO DI NEPERO $e = 2,7182818284 \dots$

QUALE È QUESTA PROPRIETÀ ~ PIÙ
DEI REALI?

CI SONO MODI EQUIVALENTI PER
CARATTERIZZARLA

ESISTENZA DELL'ELEMENTO SEPARATORE

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad B \subseteq \mathbb{R}$$

$$t.c. \quad a \leq b \quad \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$$

$\exists$ ALMENO UN ELEMENTO $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \text{ e } b \in B$$