

derivate

ABBIAMO GIÀ INTRODOTTTO UN
LIMITE DEL TIPO

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

QUESTO ERA LEGATO AL CONCETTO DI
VELOCITA' ISTANTANEA E $s(t)$ RAPPRESENTAVA
LA POSIZIONE AL PUNTO t .

SI A $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I INTERVALLO
APERTO $x_0 \in I$

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

HA SENSO STUDIARE TALE

LIMITE IN QUANTO f È DEFINITA IN UN INTERVALLO

DI x_0 , SE IL LIMITE $\exists$ FINITO SI DICE

CHE f È DERIVABILE IN x_0 E IL VALORE

DI TALE LIMITE SI CHAMA DERIVATA DI f IN

x_0 E SI INDICA $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$

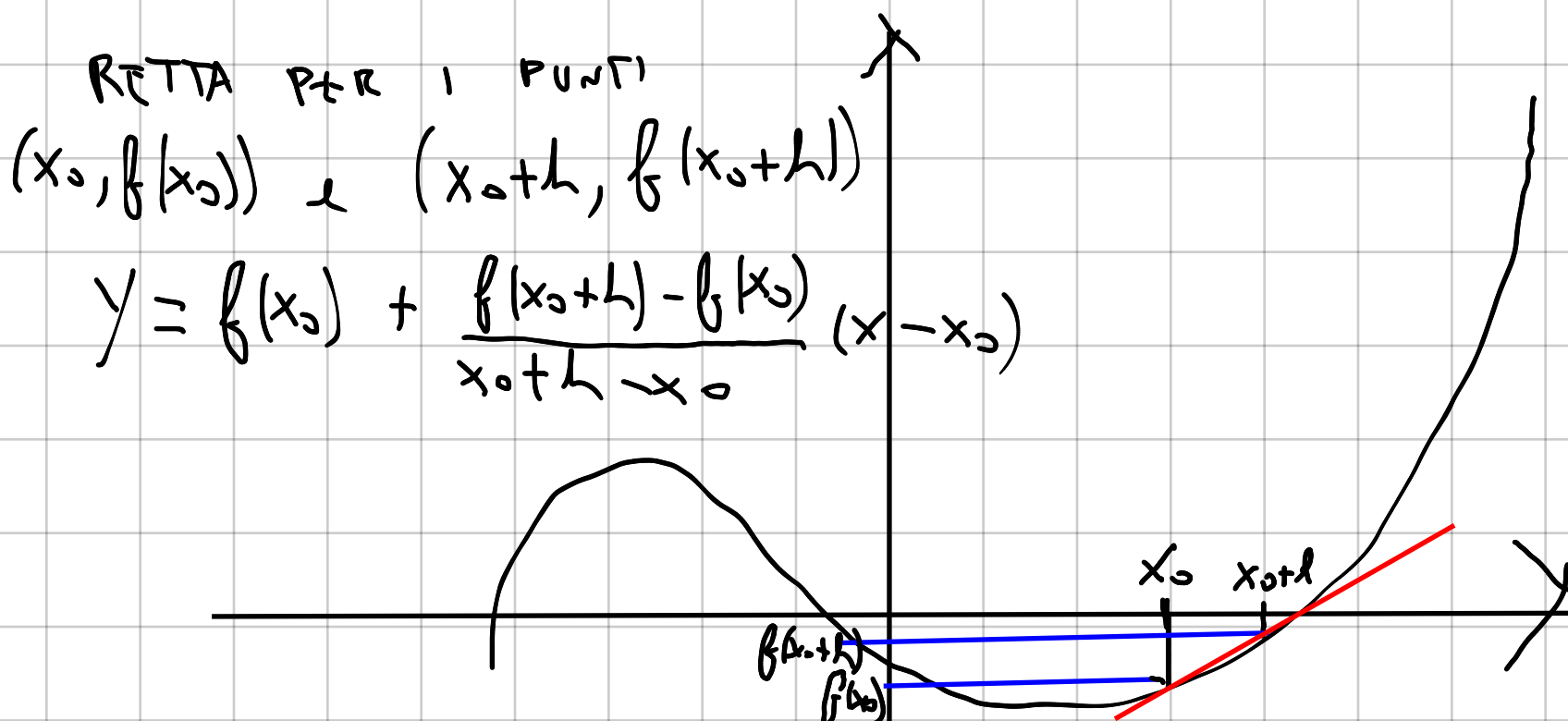
Quindi se $\exists \neq 170$

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

TALE LIMITE CORRISPONDE ALL'HE A

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (h = x - x_0)$$

COSA SIGNIFICA GEOMETRICAMENTE?



$$m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

È IL COEFF. ANGOLARE DELLA

RETTA SECANTE, QUANDO h TENDE A ZERO
 INDIVIDUIAMO IL COEFF DELLA RETTA "TANGENTE"

Quindi se $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
 $= f'(x_0) \rightarrow$ RETTA $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

PROP SIA f DERIVABILE IN $x_0 \in I \Rightarrow$
 f CONTINUA IN $x_0 \in I$

$$\text{DIN} \quad |f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| |x - x_0|$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = |f'(x_0)| \cdot 0 = 0$$

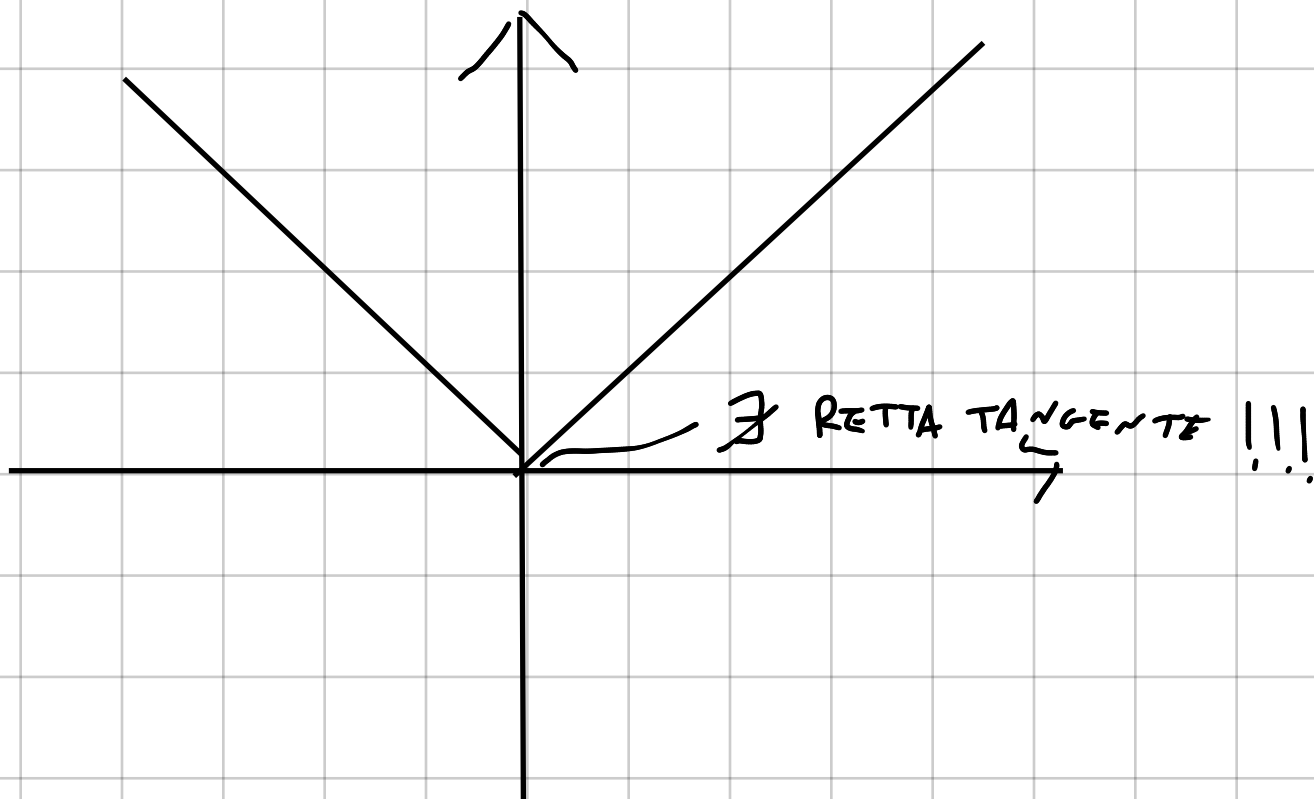
f CONTINUA IN x_0

IL VICEVERSA IN GENERALE E' FALSO

ESEMPIO $f(x) = |x|$ CONTINUA IN $\mathbb{R}$

MA $\nexists$ LA DERIVATA IN $x_0 = 0$ IN TUTTI
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$



QUANDO VOGLIAMO CALCOLARE UNA DERIVATA
IN UN PUNTO x_0 DOBBIAMO SEMPRE FARE
UN LIMITE DEL TIPO $\frac{0}{0}$ FORMA INDETERMINATA

SIA $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I INTERVALLO APERTO
 f SI DICE DERIVABILE IN I SE E'
DERIVABILE $\forall x \in I$ quindi $\exists f'(x) \forall x \in I$

IN TAL CASO POSSIAMO DEFINIRE LA FUNZ.
DERIVATA $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f'(x)$ E' PROPRIO
IL VALORE ASSUNTO IN x . A SUA VOLTA
SE LA FUNZIONE $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ RISULTA DERIVABILE
POSSIAMO INDICARE LA SUA DERIVATA CON f''
OVVERO $f''(x) = (f')'(x)$ SI SCRIVE ANCHE

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) \quad \text{OVVIAMENTE POSSIAMO SEMPRE}$$

CONTINUARE E CHIEDERCI SE $f'': I \rightarrow \mathbb{R}$
E' DERIVABILE E IN TAL CASO DEFINIRE
LA DERIVATA TERZA $f'''(x)$. IN TAL
MODO POSSIAMO INTRODURRE DERIVATE DELL'ORDINE
CHE VOGLIAMO, DERIVATA DI ORDINE n (SE $\exists$!) $f^{(n)}(x)$

CALCOLO DI ALGUB DERIVATE

$$f(x) = k \quad \text{CONSTANTE}$$

$$\forall x_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = 0$$

$$f'(x) \equiv 0$$

$$f(x) = x \quad \forall x_0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

$$f'(x) \equiv 1$$

$$f(x) = x^2 \quad \text{FISSATO } x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2x_0$$

$$f'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}!$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x_0 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \forall x_0 > 0 \quad (\text{poiché } x_0 = 0 \text{ è solo problema})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})(x - x_0)} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

$$= 1 \cdot \cos\left(\frac{x_0+x_0}{2}\right) = \cos(x_0)$$

$$f'(x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

IN MODO ANALOGO SI DIMOSTRA $f(x) = \cos(x)$
 $\exists f'(x) = -\sin(x)$

PROP SIANO f E g DUE FUNZIONI

DERIVABILI IN x_0 . ALLORA

$f+g$ E $f \cdot g$ SONO DERIVABILI IN x_0

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

LA PRIMA È UN'IMMEDIATA CONSEGUENZA DELLA DEFINIZIONE E DEL FATTO CHE IL LIMITE DELLA SOMMA È LA SOMMA DEI LIMITI

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

BS $f(x) = x \sin(x)$

$$f'(x) = (x)' \sin(x) + x (\sin(x))' = 1 \cdot \sin(x) + x \cos(x) \\ = \sin(x) + x \cos(x)$$

$$f(x) = x^2 \sqrt{x} \quad x > 0$$

$$f'(x) = 2x \sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x^3} + \frac{1}{2}\sqrt{x^3} = \frac{3}{2}\sqrt{x^3}$$

$$f(x) = x^3 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x^3 = x \cdot x^2$$

$$f'(x) = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$$

$$f(x) = x^4 \quad ?$$

$$f' = 1 \cdot x^3 + x \cdot 3x^2 = 4x^3$$

IN GENERALE USA, DO L' "IN DERIVAZIONE"

SI DIMOSTRA CHE

$f(x) = x^m$ È DERIVABILE PER OGNI $m \in \mathbb{N}$

$$\text{E } f'(x) = m x^{m-1}$$

ES $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 1$

$$f'(x) = 9x^2 + 10x + 6$$

RETTA TANGENTE AD f IN $x = 0$?

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = 6$$

$$\Rightarrow \text{HA EQUAZIONE } y = 1 + 6x$$

PROP SIA f DERIVABILE IN $x = x_0$

$f(x_0) \neq 0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{f(x)}$ E' DERIVABILE

IN $x = x_0$ E $g'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$

DIM $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{(x - x_0) f(x) f(x_0)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{1}{f(x) f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{f^2(x_0)} f'(x_0)$$

DA QUESTA SI DEDUCE

PROP SIANO f E g DERIVABILI IN x_0

$g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ E' DERIVABILE IN x_0

$$E \left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

INFATTI $\left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right]' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g} \right)'(x) =$

$$f'(x) \frac{1}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$$

$\forall x$ IN CUI f E g SONO DERIVABILI E $g(x_0) \neq 0$

$$f(x) = \tan(x) \quad ? \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \quad f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 6x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{8x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + x}{\sin(x)}$$

CONTINUA

IN

$x > 0$

ESCLUSI I

PUNTI

$k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

DERIVABILE

NELLO

STESSO

INSIEME

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right) \sin(x) - (\sqrt{x} + x) \cos(x)}{\sin^2(x)} =$$

$$= \frac{\sin(x) + \sqrt{x} \sin(x) - x \cos(x) - x \sqrt{x} \cos(x)}{\sqrt{x} \sin^2(x)}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N} \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

NOTAZIONE

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$(x^{-n})' = -n x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

QUINDI DEFINIAMO x^p $\forall p \in \mathbb{Z}$

$x^0 = 1$ E SAPPIAMO CHE IL GENERALE

$$(x^p)' = p x^{p-1} \quad (x \neq 0 \text{ se } p < 0)$$

COSÌ QUESTA NOTAZIONE ABBIAMO CHE VALGONO

LE SEGUENTI NOTE PROPRIETÀ SULLE POTENZE

$$x^{p_1} \cdot x^{p_2} = x^{p_1+p_2} \quad \forall p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$$

$$(x^{p_1})^{p_2} = x^{p_1 p_2}$$

$$x^p \cdot y^p = (x \cdot y)^p$$

SE DEFINIAMO $\forall x > 0$ $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$
AVREMO $\sqrt[m]{x^m} = x^{\frac{m}{m}}$

IN QUESTO MODO DIAMO SENSO ANCHE PER
 $x > 0$ ALL'ESPRESSIONE x^r $\forall r \in \mathbb{Q}$.

INFATTI SE $r = \frac{m}{n}$, $x^r = \sqrt[n]{x^m}$ DOVE SE $m < 0$ $x^m = \frac{1}{x^{-m}}$

ES $x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

IN QUESTO MODO LE FORMULE SCRITTE SOPRA
CONTINUANO A VALERE ANCHE SUI RAZIONALI

FAREMO VEDERE CHE $\forall x > 0$ $\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(x^r)' = r x^{r-1} \quad (\text{DERIVATA DI FUNZ. COMPOSTA + DERIVATA DI FUNZ. INVERSA})$$

INTRATTO VEDIAMO UN ESEMPIO

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} & f'(x) &= \frac{-(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{x\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} & \leadsto (x^{-\frac{1}{2}})' &= -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$