DERIVAZIONE DI FUNZIONE COMPOSTA

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

SIA DEFINITA $g \circ f$ SE f E' DERIVABILE IN x_0 E g E' DERIVABILE IN $y_0 = f(x_0)$ ALLORA $g \circ f$ E' DERIVABILE IN x_0 E

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

ESEMPIO $h(x) = \sin(x^3 + 2x + 1)$

$h = g \circ f \qquad f = x^3 + 2x + 1 \qquad g(y) = \sin(y)$

$f'(x) = 3x^2 + 2 \qquad g'(y) = \cos(y)$

$$h'(x) = \cos(x^3 + 2x + 1)\,(3x^2 + 2)$$

<u>ES</u> $h(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$

$g(y) = \sqrt{y} \qquad f(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}} \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{2(x^2+1)^2} \cdot 2x = -x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$

SE DIAMO PER BUONA $(y^\alpha)' = \alpha y^{\alpha-1}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$h(x) = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad g(y) = y^{-\frac{1}{2}}$ $\quad f(x) = x^2+1$

$g'(y) = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}}$ $\quad f'(x) = 2x$

$\hookrightarrow h'(x) = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$ COME PRIMA

IDEA $\frac{d}{dx} g(f(x)) \text{ "=" } \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \text{ "=" }$$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

NON È CORRETTO PERCHÈ $f(x)$ PUÒ ESSERE UGUALE A $f(x_0)$

DIMOSTRAZIONE

$$E(k) = \begin{cases} 0 & \text{SE } k = 0 \\ \dfrac{g(u+k) - g(u)}{k} - g'(u) & \text{SE } k \neq 0 \end{cases}$$

$\lim_{k \to 0} E(k) = g'(u) - g'(u) = 0 \Rightarrow E(k)$ CONTINUA IN $k = 0$

ABBIAMO $g(u+k) - g(u) = (g'(u) + E(k))k$ (1)

SE $u = f(x)$ $k = f(x+h) - f(x) \rightarrow u + k = f(x+h)$ (2)

$$\Rightarrow g(f(x+h)) - g(f(x)) \overset{(2)}{=} g(u+k) - g(u) \overset{(1)}{=} (g'(u) + E(k))k \overset{(2)}{=} (g'(f(x)) + E(k))(f(x+h) - f(x))$$

QUINDI

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \lim_{h \to 0} (g'(f(x)) + E(k)) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

SE $h \to 0 \rightarrow k \to 0$ QUINDI $E(k) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

$$= g'(f(x))\, f'(x)$$

DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA

SIA $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DERIVABILE E INVERTIBILE

ALLORA $\exists\, f^{-1}$ E TALE FUNZIONE E' DERIVABILE IN OGNI PUNTO DEL SUO DOMINIO $(f(I))$ y_0 t.c. $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$ OVVERO NEL PUNTO x_0 t.c. $f(x_0) = y_0$ DEVE ESSERE $f'(x_0) \neq 0$

SI HA

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

<u>OSS</u> SE ASSUMIAMO f^{-1} DERIVABILE IN y_0 DALL'IDENTITA' $f \circ f^{-1}(x) = x$ DERIVANDO E USANDO LA REGOLA DI DERIVAZIONE COMPOSTA OTTENIAMO

$$f'(f^{-1}(x))\,(f^{-1})'(x) = 1 \longrightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\lim_{k\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+k)-f^{-1}(y_0)}{k} \qquad k = f(x_0+h)-f(x_0)$$

$$f(x_0) = y_0$$

$$k = f(x_0+h) - y_0 \qquad f(x_0+h) = y_0 + k$$

$$x_0 + h = f^{-1}(y_0+k)$$

$$\lim_{k\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{f(x_0+h)-f(x_0)} \qquad \lim_{k\to 0} h = \lim_{k\to 0} f^{-1}(y_0+k)-f^{-1}(y_0) = 0$$

f^{-1} continua

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

ESEMPIO $f(x)=\sqrt{x}$ INVERSA DI $g(y)=y^2$

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{2g^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

IN GENERALE

$f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ $(x>0)$ INVERSA $g(y)=y^n$

$$(f')(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(f(x))} =$$

$$= \frac{1}{n\, f(x)^{n-1}} = \frac{1}{n\, x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n\, x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

QUINDI $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

$x^{\frac{m}{n}}$? $x>0$

COMPOSIZIONE DI $g(y)=y^m$ e $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$

$$(x^{\frac{m}{n}})' = (g\circ f(x))' = g'(f(x))\, f'(x) =$$

$$m\left(f(x)^{m-1}\right) f'(x) = m\, x^{\frac{m-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-1-n+1}{n}} =$$

$$\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \qquad \left[x^{\frac{m}{n}}\right]' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

$f(x) = \arcsin(x)$ INVERSA DI

$g(y) = \sin(y)$ DEFINITA IN $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA E DERIVABILE

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = ?$$

IN $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)}$

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ES $f(x) = \arctan(x)$ INVERSA $\tan(y)$

RISTRETTA A $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad (\tan'(y)) = \frac{1}{\cos^2(y)}$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} = \frac{\cos^2(\arctan(x))}{1} =$$

$$= \frac{\cos^2(\arctan(y))}{\cos^2(\arctan(x)) + \sin^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f(x) = x^3 + 2\sin(x) + 1$$

DIMOSTRARE CHE f RISTRETTA A $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
È INVERTIBILE, CALCOLARE

$$(f^{-1})'(1)$$

f MONOTONA STRIT. CRES IN $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
INVERTIBILE

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$$

$f'(y) = 3y^2 + 2\cos(y)$ $\qquad f^{-1}(1) = ?$

$y^3 + 2\sin(y) + 1 = 1$ $\qquad y_0 = f^{-1}(1) = ?$

$y = 0$ AD OCCHIO

$$f'(0) = 2 \Rightarrow (f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$$