Teoremi sulle funzioni derivabili

SIA f DEFINITA IN $[x_0, b)$
POSSIAMO DEFINIRE LA DERIVATA DESTRA SE $\exists$ FINITO IL SEGUENTE

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

IN QUESTO CASO LO INDICHIAMO COME $\frac{d^+}{dx} f(x_0)$

ANALOGAMENTE SE f E' DEFINITA IN $(a, x_0]$ POSSIAMO DEFINIRE LA DERIVATA SINISTRA SE $\exists$ FINITO

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

LA INDICHIAMO CON $\frac{d^- f}{dx}(x_0)$

SE f E' DEFINITA IN (a,b)

ALLORA E' DERIVABILE IN $x_0 \in (a,b)$

$\Longleftrightarrow \exists_{\mathbb{R}_0} \frac{d^+}{dx} f(x_0), \frac{d^-}{dx} f(x_0)$

E COINCIDONO, OVVIAMENTE

$$\frac{d^+ f}{dx}(x_0) = \frac{d^- f}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$$

ES

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & x \geq x_0 \\ g(x) & x < x_0 \end{cases}$$

SE $\lim_{h \to 0^+} \frac{h(x_0+h) - h(x_0)}{h} = l \in \mathbb{R}$

E !! $\lim_{h \to 0^-} \frac{g(x_0+h) - h(x_0)}{h} = l \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \exists \; f'(x_0) = l$

IN PARTICOLARE SE g e h SONO DEFINITE IN UN INTORNO DI x_0 CON $h(x_0)=g(x_0)$ E SONO ENTRAMBE DERIVABILI IN x_0

ALLORA f È DERIVABILE IN x_0 $\Longleftrightarrow$ $h'(x_0)=g'(x_0)$ IN QUESTO CASO SI HA $f'(x_0)=g'(x_0)=h'(x_0)$

ESERCIZIO

$$f(x)=\begin{cases} \cos(x) & x\geq 0 \\ \frac{x^2}{2}+1 & x<0 \end{cases}$$

f CONTINUA IN $x=0$ INFATTI $g=\cos(x)$ E $h=\frac{x^2}{2}+1$ SONO CONTINUE IN $\mathbb{R}$ E $g(0)=h(0)$

INOLTRE $g'(x)=\sin(x)$ $h'(x)=x$

$g'(0)=h'(0)=0 \Rightarrow \exists\ f'(0)=0$

SIA f CRESCENTE IN (a,b)

E DERIVABILE IN TALE INTERVALLO

ALLORA $f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$

INFATTI

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \forall\, h$$

È EVIDENTE PER $h>0$

INFATTI IL DENOMINATORE È ≥ 0

E $f(x_0+h) \geq f(x_0)$ ESSENDO $h>0$ E

f CRESC.

DISCORSO ANALOGO SE $h<0$

QUINDI PER LA PERMANENZA

DEL SEGNO

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

ANALOGAMENTE SE f E' DECR E DERIVABILE IN (a,b) $\Longrightarrow$ $f'(x) \leq 0$

SONO UTILI QUESTE INFORMAZIONI?

SAREBBE MOLTO PIÙ UTILE SAPERE CHE $f'(x) \geq 0$ IN $(a,b) \Rightarrow f$ CRESC. IN (a,b)

MA PER DIMOSTRARE QUESTO ABBIAMO BISOGNO DI "ALCUNI RISULTATI"

Def SIA $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in (a,b)$

x_0 SI DICE PUNTO DI MAX RELATIVO PER f E $f(x_0) = M$ SI DICE MAX RELATIVO PER f SE $\exists$ UN INTORNO DI $x_0 \longrightarrow (x_0-c, x_0+c)$ CONTENUTO IN (a,b) t.c. $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0-c, x_0+c)$

ANALOGAMENTE x_0 E' UN PT. DI MIN REL. E $f(x_0)$ È MIN RELAT. PER f SE $\exists$ UN INTORNO (x_0-c, x_0+c) t.c. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0-c, x_0+c)$

SIA f DEFINITA IN (a,b), SIA $x_0 \in (a,b)$ SE f È DERIVABILE IN x_0 E x_0 È PUNTO DI MAX O MIN RELATIVO PER f ALLORA $f'(x_0)=0$

DIM $f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (x_0 MAX RELAT.)

$h>0$ E $f(x_0+h) \le f(x_0)$ SE h È PICCOLO

$\overset{h>0}{\Longrightarrow} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0 \Longrightarrow f'(x_0) \le 0$

D'ALTRA PARTE $f'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

IN QUESTO CASO $h<0$ E ANCORA PER h PICCOLI $f(x_0+h) \le f(x_0) \overset{h<0}{\Longrightarrow} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge 0$

$\Longrightarrow f'(x_0) \ge 0$

PER CUI $f'(x_0) = 0$!!

STESSO DISCORSO SE x_0 È PUNTO DI MIN RELATIVO

I PUNTI IN CUI $f'(x_0)=0$ SI DICONO PUNTI STAZIONARI

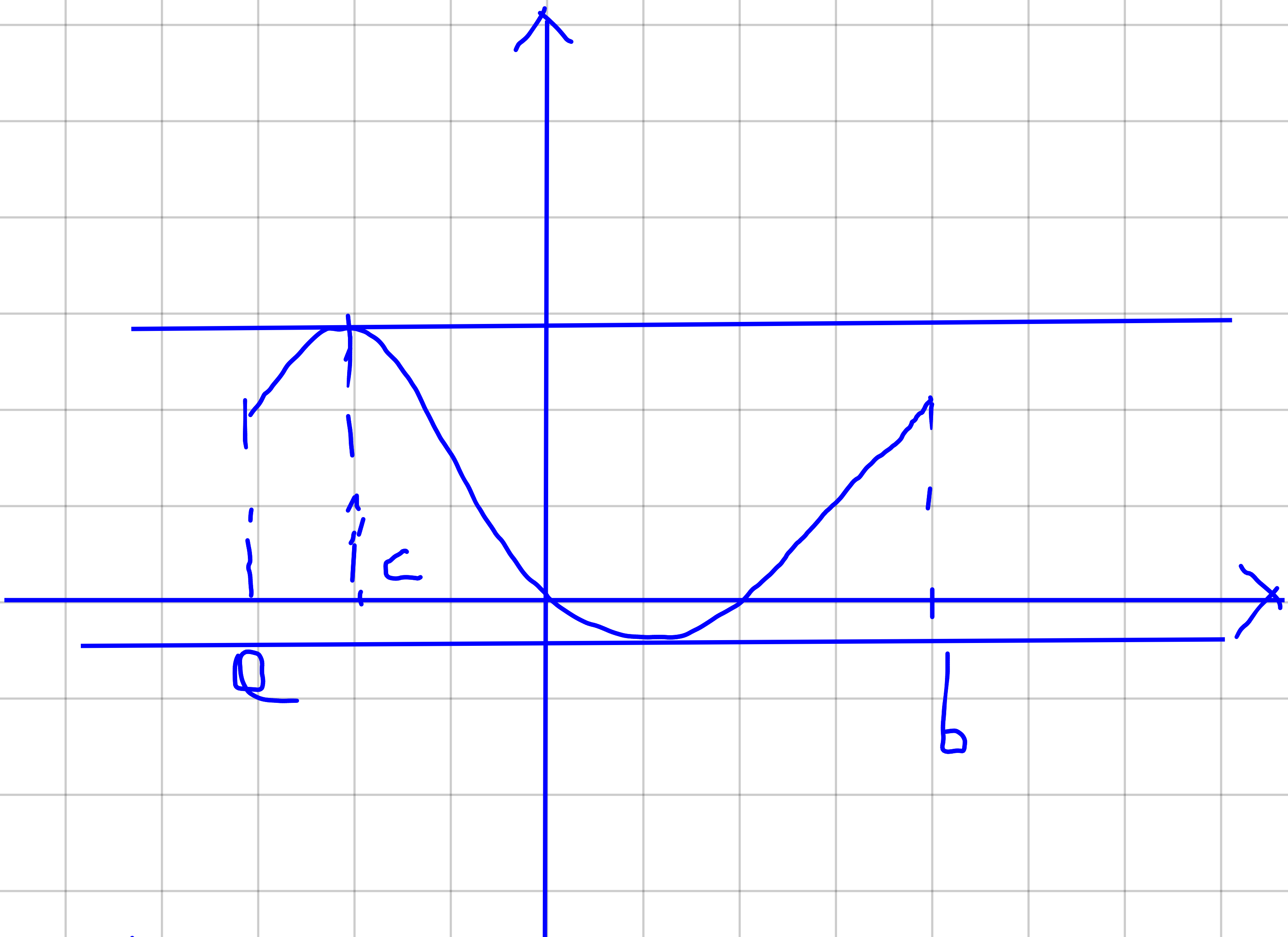
TEOREMA DI ROLLE

SIA f CONTINUA IN $[a,b]$

f DERIVABILE IN (a,b)

$f(a)=f(b)$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c)=0$



$\exists$ ALMENO UN PUNTO A TANGENTE ORIZZONTALE, PUNTO STAZIONARIO

DIM PER IL TH DI WEIERSTRASS

$\exists$ MAX E MIN ASSOLUTI

SIA x_M UN PUNTO DI MAX ASSOLUTO

SIA x_m ... ... MIN ...

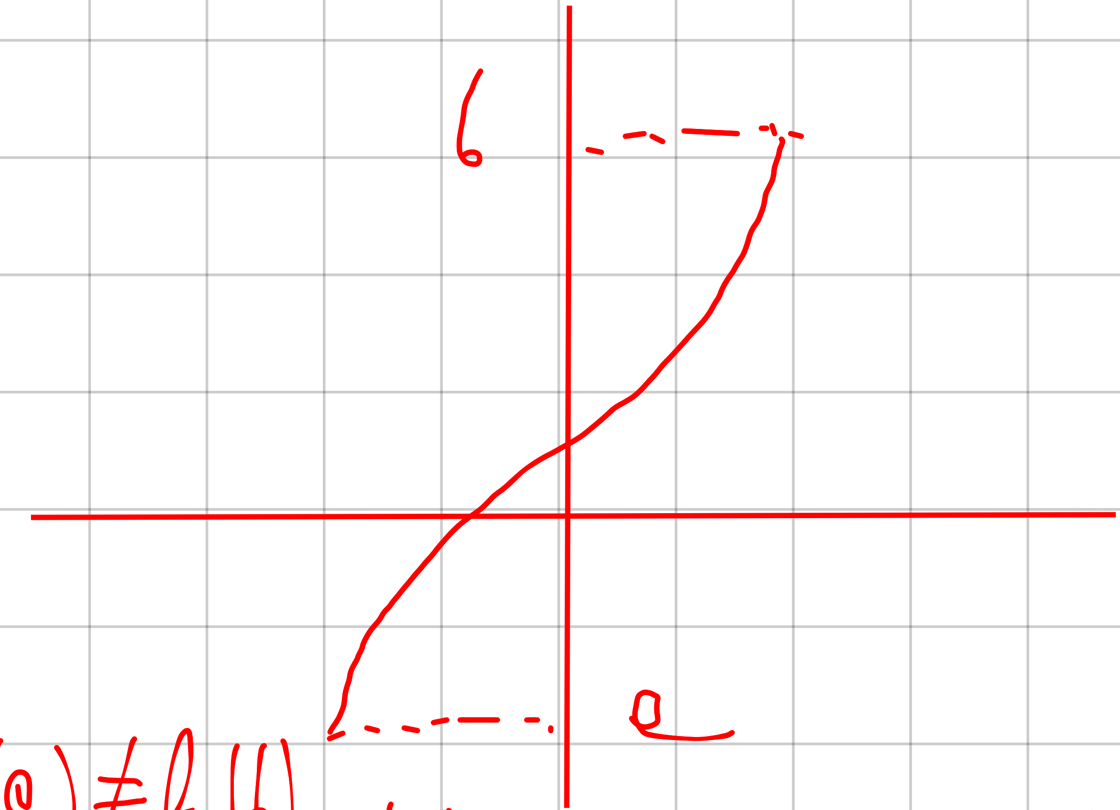
SE x_M E' UN PUNTO INTERNO ALLORA x_M E' ANCHE UN PUNTO DI MAX RELATIVO PER IL RISULTATO PRECEDENTE $f'(x_M)=0$

SE x_m E' INTERNO STESSO DISCORSO $f'(x_m)=0$

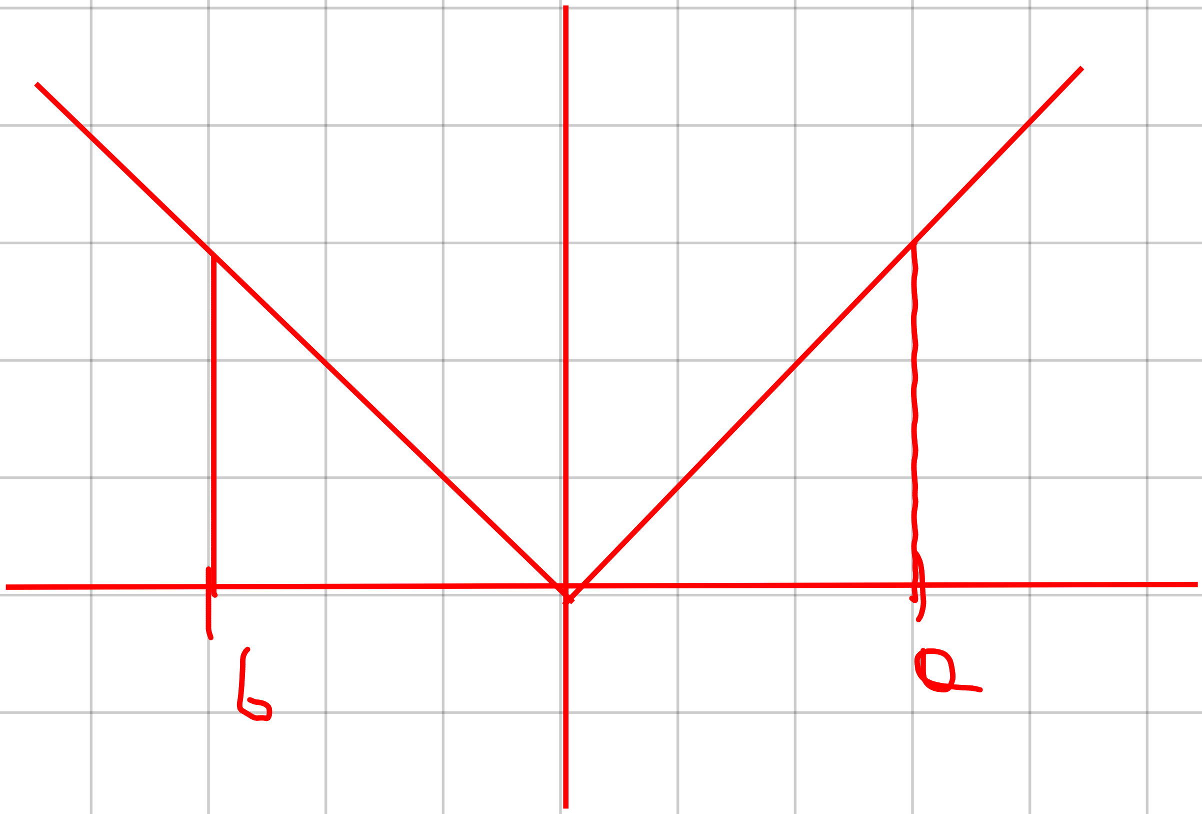
QUINDI SE ALMENO UNO TRA x_M O x_m E' INTERNO ABBIAMO LA TESI

SE NESSUNO DEI 2 E' INTERNO ALLORA SONO ENTRAMBI AGLI ESTREMI, POICHE' PER IPOTESI $f(a)=f(b) \Rightarrow f(x_M)=f(x_m)$

$\Rightarrow f$ COSTANTE, QUINDI $\forall x \in (a,b)$ $f'(x)=0$



SE $f(a) \neq f(b)$ LA TESI NON E' PIU' VERA!!



ANCHE SE f NON E' DERIVABILE IN UN PUNTO IL RISULTATO E' FALSO!

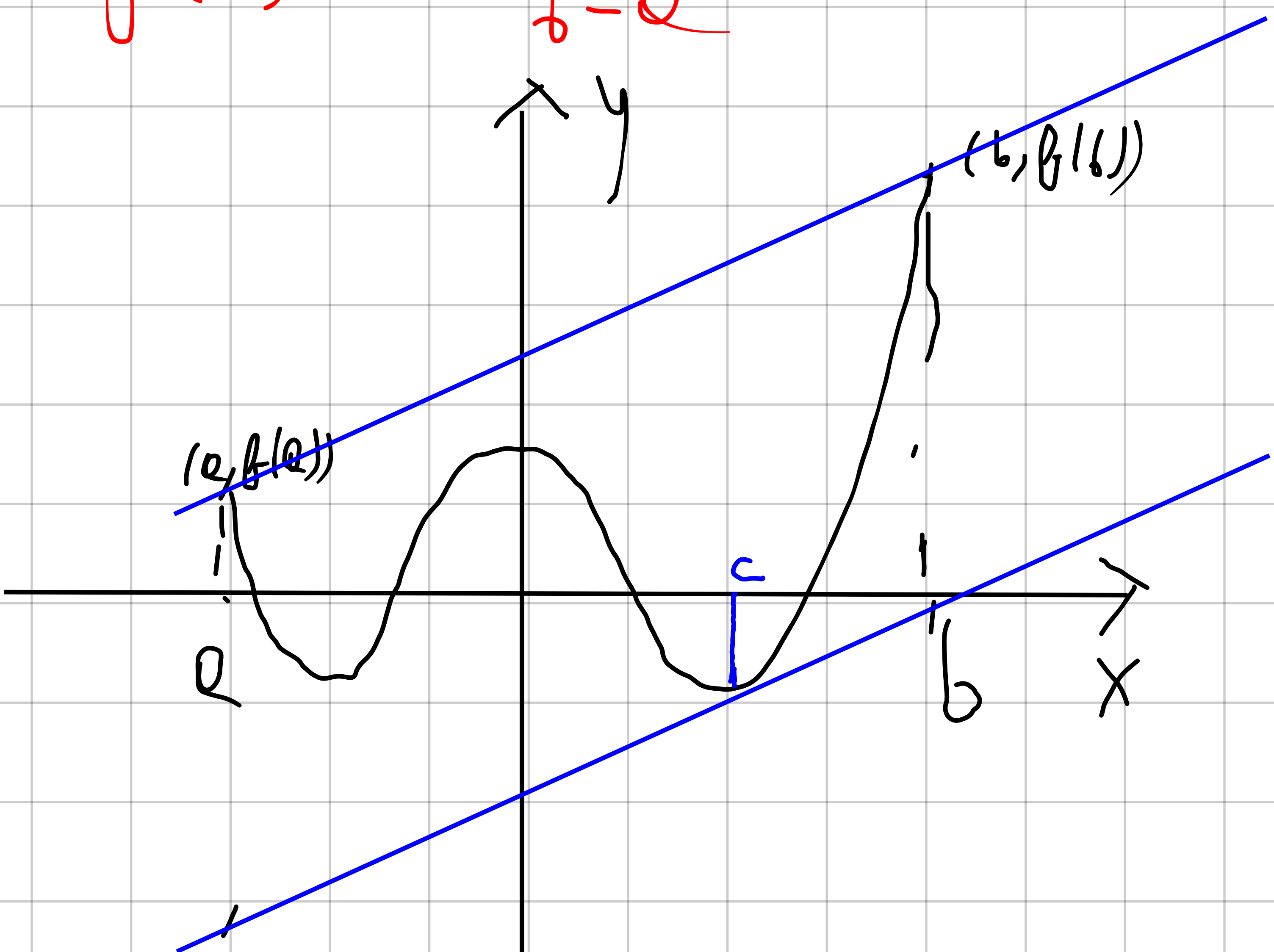
TEOREMA DI LAGRANGE

f CONTINUA IN $[a,b]$

f DERIVABILE IN (a,b)

$\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ COEF. ANGOLARE DELLA RETTA PASSANTE PER $(a, f(a))$, $(b, f(b))$

SE f E' UNA LEGGE ORARIA

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\rightsquigarrow$ VELOCITA' MEDIA

$\exists$ ALMENO UN PUNTO IN CUI LA VELOC. ISTANTANEA E' UGUALE ALLA VELOCITA' MEDIA

IL Th DI LAGRANGE CHE SI DIMOSTRA FACILMENTE USANDO IL Th DI ROLLE HA IMPORTANTI CONSEGUENZE, FONDAMENTALI PER STUDIARE L'ANDAMENTO DI UNA FUNZIONE

DM $h(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ CORRISPONDE ALLA RETTA PER I PUNTI $(a, f(a))$, $(b, f(b))$

SIA $g(x) = f(x) - h(x)$

1) g E' CONTINUA IN $[a,b]$

ii) g E' DERIV. IN (a,b)

iii) $g(a) = f(a) - h(a) = f(a) - f(a) = 0$

$g(b) = f(b) - h(b) = f(b) - f(b) = 0$

$\Longrightarrow$ Th DI ROLLE $\exists c$ t.c. $g'(c) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \longrightarrow$$

$$g'(c) = 0 \Longrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

COROLLARIO SIA f DERIVABILE IN (a,b)

TC $f'(x) > 0$ IN (a,b) $\Rightarrow$ f STRET. CRESC

$f'(x) \geq 0$ ---- $\Rightarrow$ f CRESC.

$f'(x) < 0$ ...... $\Rightarrow$ f STRET. DECR

$f'(x) \leq 0$ .... $\Rightarrow$ f DECRES.

DIM FACCIAMO LA PRIMA LE ALTRE SI DIM. IN MODO ANALOGO

SIANO $x_1, x_2 \in (a,b)$ t.c. $x_1 < x_2$, APPLICHIAMO IL Th DI LAGRANGE ALL'INTERVALLO $[x_1, x_2]$

$\Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} \rightsquigarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

PER CUI SE $f'(c) > 0$ E $x_2 > x_1$ SI HA

$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ $[c \in (a,b)$ PER CUI $f'(c) > 0]$

DAL RISULTATO DI SOPRA SI DEDUCE CHE SE f E' DERIV. IN (a,b) E $f'(x) \equiv 0$ IN $(a,b) \Rightarrow f$ COSTANTE

INFATTI f DOVREBBE ESSERE CONTEMP. CRES. E DECR PER CUI E' NECESSARIAM. COSTANTE

ATTENZIONE LA COSA NON ERA BANALE

f COSTANTE $\Rightarrow f'(x) \equiv 0$ E' BANALE NON IL VICEVERSA

SE f NON E' DEFINITA SU UN INTERVALLO IL RISULTATO E' FALSO

$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ IN $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ HA DERIVATA NULLA $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ MA NON E' COSTANTE IN $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

QUINDI SE f E g SONO 2 FUNZIONI DERIVABILI IN (a,b) t.c. $f'(x) = g'(x) \Rightarrow$ $\forall x \in (a,b) \Rightarrow f'(x) - g'(x) \equiv 0$ IN $(a,b) \Rightarrow$ $f(x) - g(x) = k$ COSTANTE QUINDI LE 2 FUNZ.

SONO UGUALI A MENO DI UNA COSTANTE

COME SI USA IL TH DI LAGRANGE NELLO STUDIO DELL'ANDAMENTO DI UNA FUNZ.?

SE DERIVIAMO LA FUNZ. E STUDIAMO IL SEGNO DI $f'(x)$ SIAMO IN GRADO DI DIRE IN QUALI INTERVALLI LA FUNZ. CRESCE O DECRES.

IN PARTICOLARE SE f DEFINITA IN (a,b) CRESCE IN (a,c) E DECR. IN (c,b) $\Longrightarrow$ c PUNTO DI MAX RELATIVO E $f(c)$ E' UN MAX RELATIVO PER f

ANALOGAMENTE SE f DEFINITA IN (a,b) DECR IN (a,c) E CRES. IN (c,b) $\Longrightarrow$ c E' UN PUNTO DI MIN RELATIVO E $f(c)$ E' UN MIN RELATIVO PER f

SIA $f(x) = \sqrt{x+1} - x$

DEFINITA PER $x > -1$

CONTINUA IN $[-1, +\infty)$, DERIVABILE IN $(-1, \infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - 1 = \frac{1-2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-2\sqrt{x+1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < \frac{1}{2}$$

$x+1 < \frac{1}{4}$ $(x > -1)$ $\rightarrow$ $x < -\frac{3}{4}$ QUINDI

f CRES IN $\left(-1, -\frac{3}{4}\right]$ E DECR IN $\left(-\frac{3}{4}, +\infty\right)$

$\Rightarrow$ $x_0 = -\frac{3}{4}$ PUNTO DI MAX RELATIVO

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$f(-1) = 1$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = ?$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - x)(\sqrt{x+1} + x)}{\sqrt{x+1} + x} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1-x^2}{\sqrt{x+1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\left[\frac{1}{\cancel{x}} + \frac{1}{x^2} - 1\right]}{\cancel{x}\left[1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right]} = -\infty$$

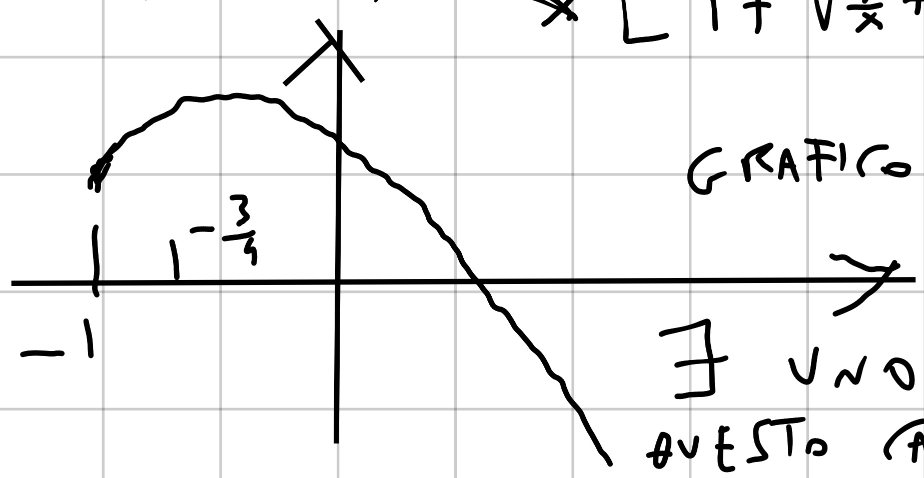


GRAFICO APPROSSIMATIVO

$\exists$ UNO ZERO IN

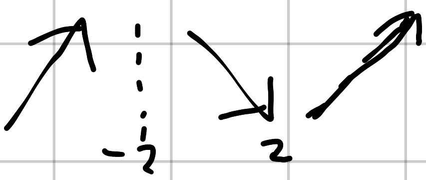
QUESTO CASO SI POTEVA CALCOLARE

$f(x) = \frac{x^3}{12} - x + 1$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{x^2}{4} - 1 \qquad f'(x) > 0 \iff x^2 > 4 \iff x < -2$

$x > 2$



$x = -2$ MAX RELATIVO

$x = 2$ MIN RELATIVO

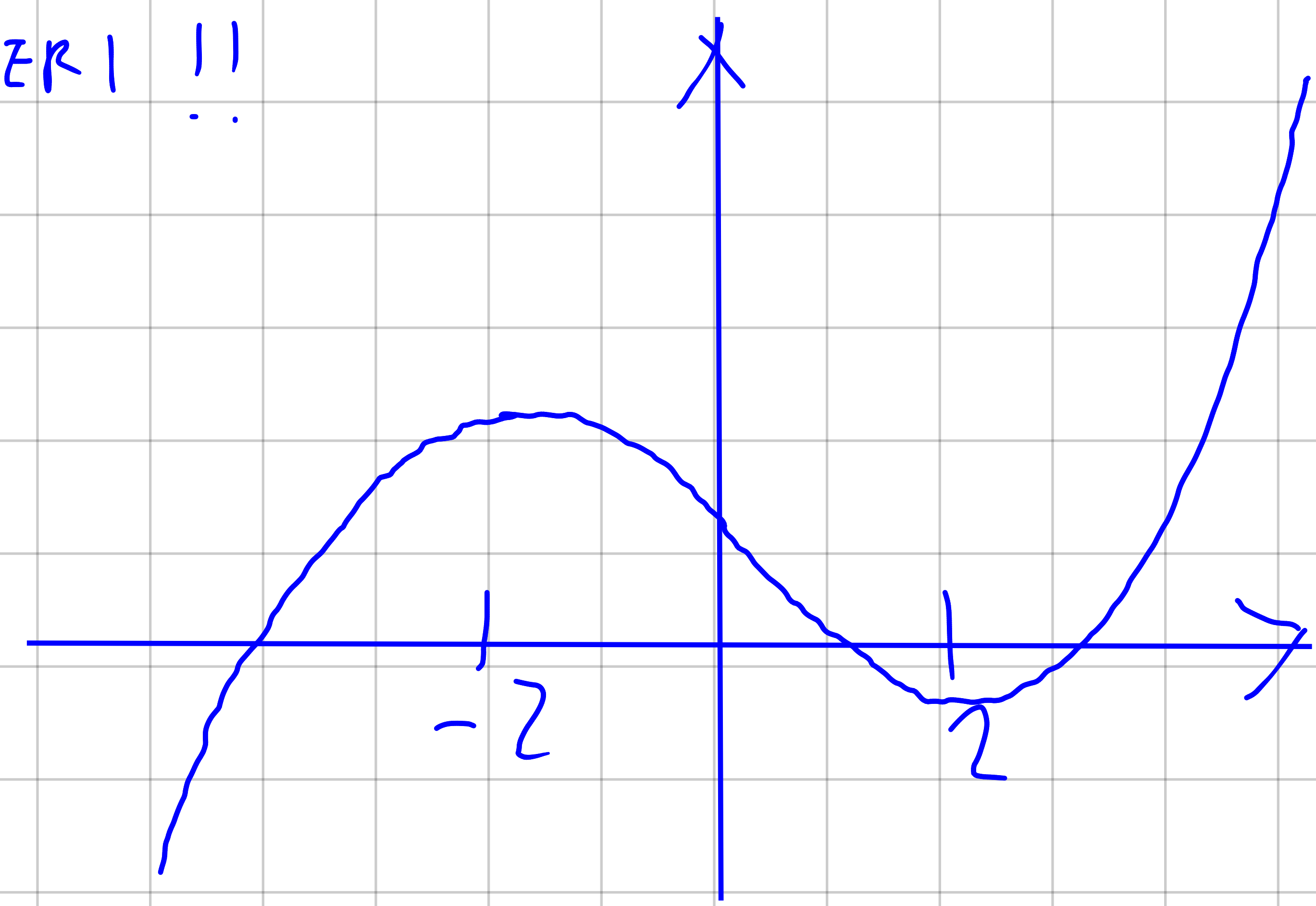
$f(-2) = \frac{-8}{12} + 2 + 1 = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$

$f(2) = \frac{8}{12} - 2 + 1 = -\frac{1}{3}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

QUANTI ZERI?

3 ZERI !!



SIA

$$f(x) = \sin(x) + x + \frac{1}{2} + \sqrt{x}$$

DIMOSTRARE CHE $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$$f(0) = \frac{1}{2} \qquad f'(x) = \cos(x) + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq -1 + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow$$

f CRESC. $\Rightarrow f(x) \geq f(0) \quad \forall x \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{2} > 0$

"STUDIARE" UNA FUNZIONE NON SIGNIFICA NECESSARIAMENTE DISEGNARE UN GRAFICO

A VOLTE SI PUÒ USARE LO STUDIO DELLA MONOTONIA PER RISPONDERE A QUESITI SU EQ E DISEQ.

POSSIBILE QUESITO DETERMINARE

$\mathrm{Im} f$!!!

$f(x) = \sqrt{x+1} - x \qquad D_f = [-1, \infty)$

$f(D_f) = (-\infty, \frac{5}{4}]$

$f(x) = \frac{x^3}{12} - x + 1 \qquad D_f = \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$f(x) = \sin(x) + x + \frac{1}{2} + \sqrt{x} \qquad D_f = [0, \infty)$

$f(D_f) = [\frac{1}{2}, \infty)$