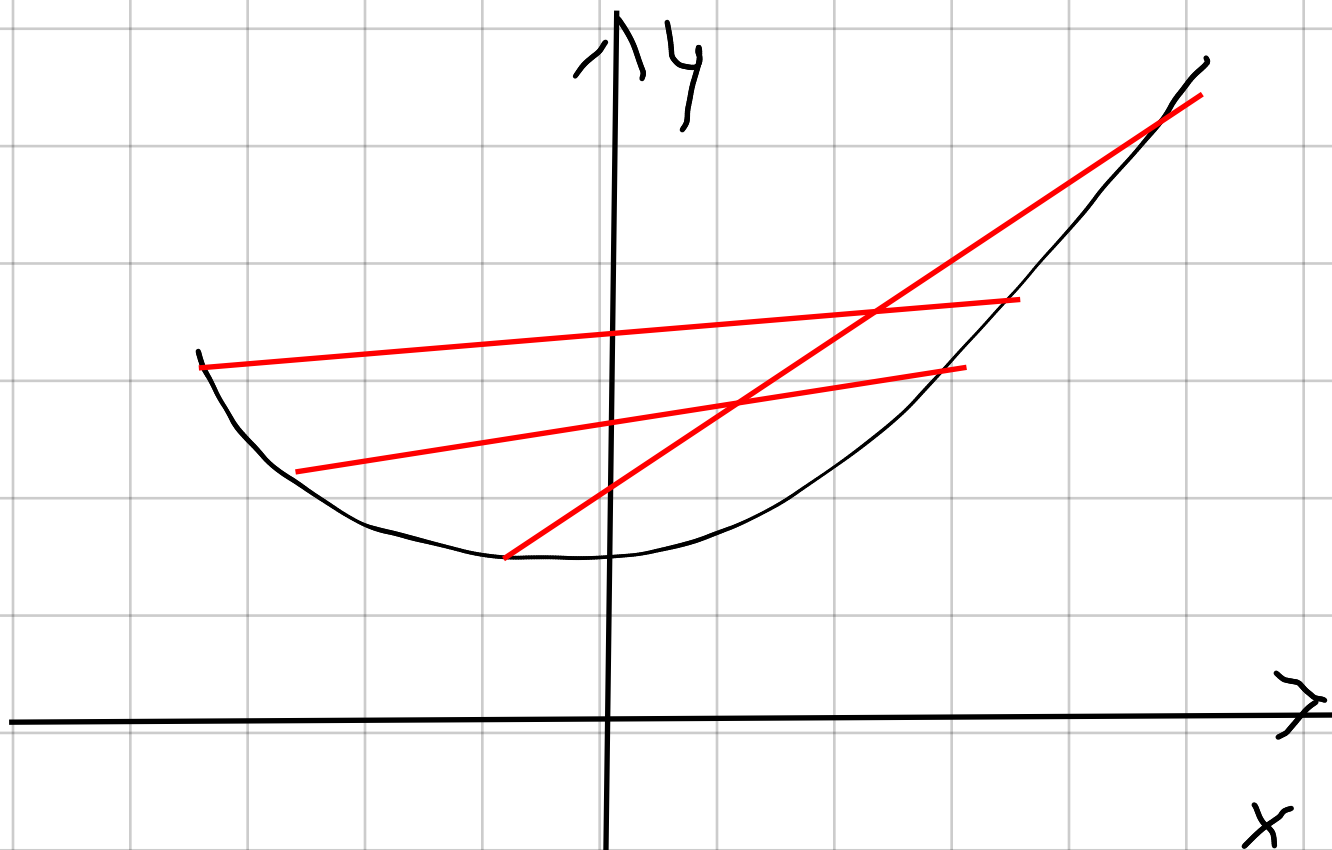


FUNZIONI CONVESSE



f CONVESSA in (a,b)

PRESE UN QUALSIASI SEGMENTO CONGIUNGENTE 2 PUNTI
SUL GRAFICO DI f , QUESTO SI TROVA SOPRA IL
GRAFICO DI f

SIA IN ALTRE PAROLE SE $x_1, x_2 \in (a,b)$

$$A = (x_1, f(x_1)) \quad B = (x_2, f(x_2))$$

$$\overline{AB} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b \quad y \geq f(x)\}$$

$$t f(x_1) + (1-t) f(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2) \quad \forall t \in [0,1]$$

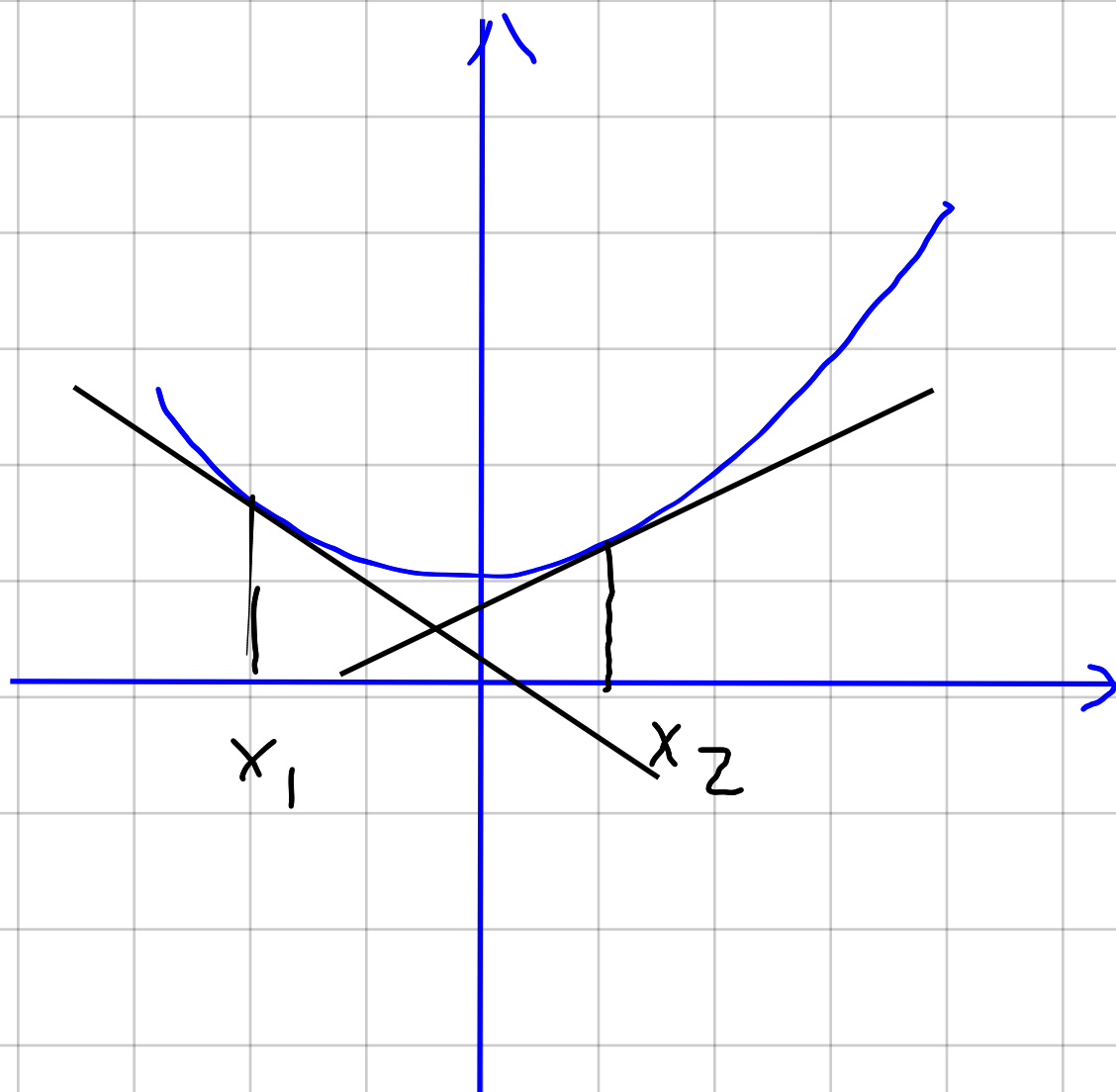
APPROCCIO PIU' SEMPLICE, SUPPONIAMO
 f DERIVABILE IN (a,b) , f SI DICE
CONVESSA IN (a,b) : $\Leftarrow \Rightarrow$

IN OGNI PUNTO DI (a,b) LA RETTA TANGENTE
SI TROVA SOTTO IL GRAFICO

$$\underline{f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)} \quad \forall x, x_0 \in (a,b)$$

RETTA TANGENTE

INOLTRE LA DISUGUAGLIANZA E' STRETTA SE $x \neq x_0$



PROP f DERIVABILE IN (a,b) ALLORA f E' CONVESA
IN $(a,b) \iff f'$ E' STRETT. CRESCENTE

$\Rightarrow$ SIA f CONVESA VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE
 f' E' STRETT. CRESC. SIANO $x_1, x_2 \in (a,b)$ $x_1 < x_2$

$$f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_1) > f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \Rightarrow$$

$$\cancel{f(x_2)} + \cancel{f(x_1)} > \cancel{f(x_1)} + \cancel{f(x_2)} + [f'(x_1) - f'(x_2)](x_2 - x_1)$$

$$[f'(x_2) - f'(x_1)](x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f'(x_2) > f'(x_1)$$

$\Leftarrow$ f' STRETT. CRESCENTE ALLORA VOGLIAMO
DIMOSTRARE CHE f E' CONVESA

SIA $x_0 \in (a,b)$ RETTA TANGENTE $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \quad \text{PER LA GRANGE}$$

SE $x > x_0$ $c \in (x_0, x)$ E $f'(c) > f'(x_0)$ (f' STRETT. CRESC.)

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

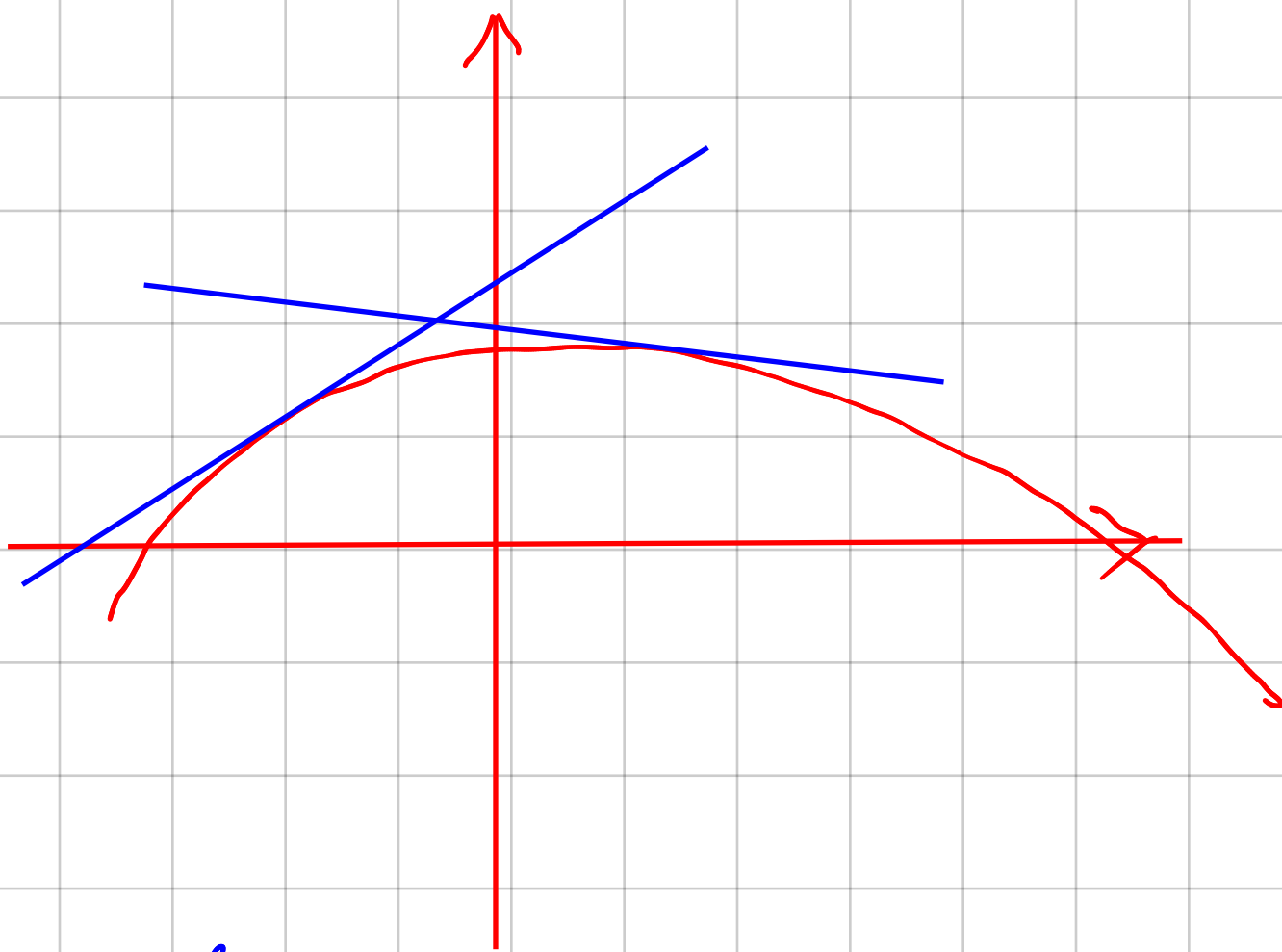
SE $x < x_0$ $c \in (x, x_0)$ E $f'(c) < f'(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$\downarrow$
 < 0

ANALOGAMENTE POSSIAMO DEFINIRE IL
 CONCETTO DI FUNZIONE CONCAVA IN (a, b)
 (PER SEMPLICITA' SUPPONIAMO $\exists f'(x)$ in (a, b))
 f CONCAVA SE $\forall x_0, x \in (a, b) \quad x_0 \neq x$

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



PROP f CONCAVA IN $(a, b): \Leftrightarrow$
 f' E' STRETT. DECRESC.

ABBIAMO DEFINITO LE DERIVATE DI ORDINE
 SUCCESSIVO, IN PARTICOLARE SE LA FUNZIONE
 $f'(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ È DERIVABILE A SUA VOLTA
 IN (a, b) ABBIAMO CHIAMATO LA SUA DERIVATA,
 DERIVATA SECONDA DI f E L'ABBIAMO INDICATA
 COME $f''(x)$ o $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$

DALLE PRECEDENTI PROPOSIZIONI ABBIAMO UN MODO SEMPLICE
 PER VEDERE SE UNA FUNZ. È CONVESSA O CONCAVA
 IN (a, b) QUANDO $\exists f''(x)$ INFATTI

PROP SIA f DERIVABILE 2 VOLTE IN (a, b) [$\exists$
 LA DERIVATA SECONDA]

SE $f''(x) > 0$ IN $(a, b) \Rightarrow f$ È CONVESSA

SE $f''(x) < 0$ IN $(a, b) \Rightarrow f$ È CONCAVA

INFATTI SE $f''(x) > 0 \Rightarrow f'$ STRET. CRESC.
 $f'' < 0 \Rightarrow f'$ STRET. DECRE.

ESEMPI

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{PARABOLA}$$

$$f'(x) = 2ax + b, \quad f''(x) = 2a \quad \text{se } a > 0$$

È CONVESSA se $a < 0$ CONCAVA

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x > 0 \rightarrow e^x \text{ È CONVES.}$$

$$f(x) = \ln(x), \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \rightarrow \ln(x) \text{ CONCAVA}$$

$$f(x) = \sin(x), \quad f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x)$$

$-\sin(x) > 0 \Leftrightarrow \sin(x) < 0 \Leftrightarrow \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$ IN
QUESTI INTERVALLI $\sin(x)$ È CONVESSA

MENTRE NEGLI INTERVALLI $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ È CONCAVA

CI SONO PUNTI IN CUI SI PASSA DA

CONCAVA A CONVESSA O VICEVERSA!!

Def Sia f DERIVABILE IN $(a, b) \setminus \{x_0\}$ t.c.

1) f CONVESSA IN (a, x_0) (CONCAVA)

2) f CONCAVA IN (x_0, b) (CONVESSA)

3) $\exists$ LA RETTA t_{x_0} IN x_0 (EVENTUALMENTE ANCHE A t_{x_0} VERTICALE)

$$\left[\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = +\infty \right]$$

x_0 SI DICE PUNTO DI FLESSO PER f

IN PARTICOLARE SE f HA DERIVATA SECONDA
IN (a, b) ED ESISTE $x_0 \in (a, b)$ t.c.

$$f''(x) > 0 \text{ in } (a, x_0) \quad | \quad f''(x) < 0 \text{ in } (x_0, b)$$

$$f''(x) < 0 \text{ in } (a, x_0) \quad | \quad f''(x) > 0 \text{ in } (x_0, b)$$

$\Rightarrow x_0$ E' UN PUNTO DI FLESSO E NECESSARIAMENTE

$$f''(x_0) = 0$$

PER CUI SE $\exists f''$ I PUNTI DI FLESSO VANNO

RICERCAITI TRA I PUNTI IN CUI SI ANNULLA $f''(x)$

AD ESEMPIO $f(x) = \sin(x)$

$x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ SONO TUTTI E SONO I FLESSI

$f(x) = e^x - x^2$ TROVARE PUNTI DI FLESSO!

$$f'(x) = e^x - 2x, \quad f''(x) = e^x - 2 \rightarrow f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 2$$

$$\Leftrightarrow x > \ln 2 \rightarrow f \text{ CONCAVA IN } (-\infty, \ln 2) \text{ E}$$

CONVEXA IN $(\ln 2, +\infty)$

MINIMI E MAX RELATIVI?

$e^x = 2x$ NON SI RISOLVE ESPlicitAMENTE!

$$f(x) = e^x - 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 2x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 2x = +\infty \quad [e^x \text{ TEMPI DI PIÙ VELOC.}]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left[1 - \frac{2x}{e^x} \right] = +\infty$$

$$\exists x_0 \text{ t.c. } e^{x_0} - 2x_0 = 0$$

STUDIANDO LA DERIVATA di $f(x)$ OTTIENIAMO

$f'(x) = e^x - 2$ SAPPIAMO BENE CHE f DECRESCe
 $(-\infty, \ln 2)$ E CRESCe IN $(\ln 2, \infty)$ PER CUI

$x_0 = \ln 2$ È IL MINIMO DI $f(x)$

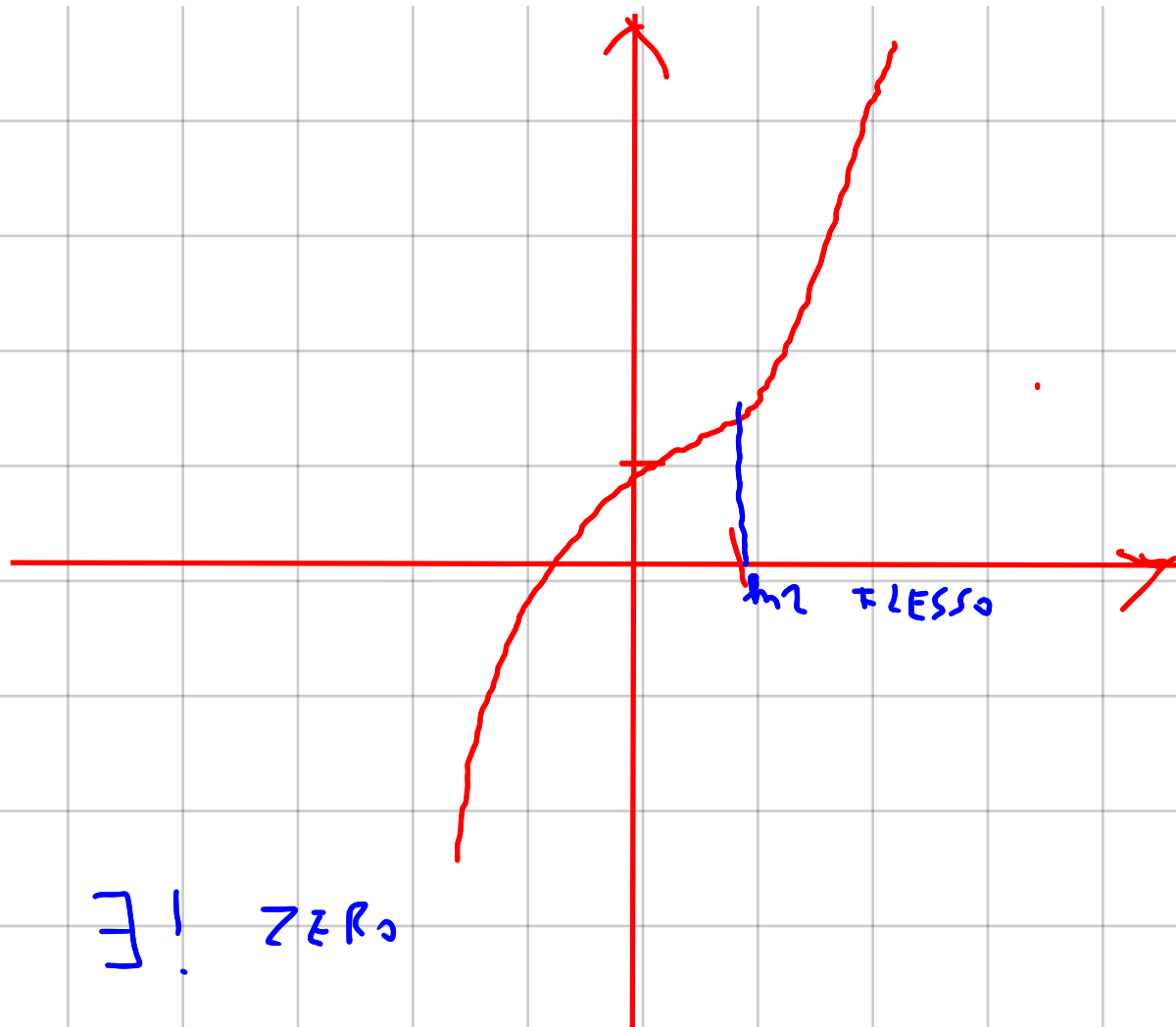
$$f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 = 2 - 2 \ln 2 = 2[1 - \ln(2)]$$

$$\ln(2) < \ln(e) = 1 \Rightarrow 1 - \ln(2) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \text{ quindi}$$

$$f(x) = e^x - x^2 \text{ NON HA NESSUNO MINIMO RELATIVO}$$

$$\text{SOLLO UNO FLESSO IN } x_0 = \ln(2)$$



$$f(0)=1 \quad \exists! \quad z \in \mathbb{R}_0$$

PER $1' \neq 0$ $x^x - x^2 = 0$ E QUESTA SI TROVA IN $(-\infty, 1)$

OSS

f PUO' ESSERE CONVESSA

ANCHE SE LA DERIVATA SECONDA SI ANNULLA IN QUALCHE PUNTO!

$$f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3 \quad f''(x) = 12x^2$$

$\Rightarrow f''(0)=0$ MA f' E' STRETT. CRESCENTE
PER CUI f E' CONVESSA IN $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x \quad f''(0)=0$$

INOLTRE $f''(x) < 0 \quad x < 0$ e $f''(x) > 0 \quad x > 0 \Rightarrow x=0$

FLESSO

$$f(x) = x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3} \quad f'(x) = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}}$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad f \text{ CRIS SIRET.}$$

f NON È DERIVABILE IN $x=0$

INFATTI $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = +\infty$

ADRIAL $\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty$ DUVOL f

AMMETTE ~~TO~~ VERTICALE IN $x=0$

$$f''(x) = -\frac{6}{25} x^{-\frac{7}{5}} \Rightarrow$$

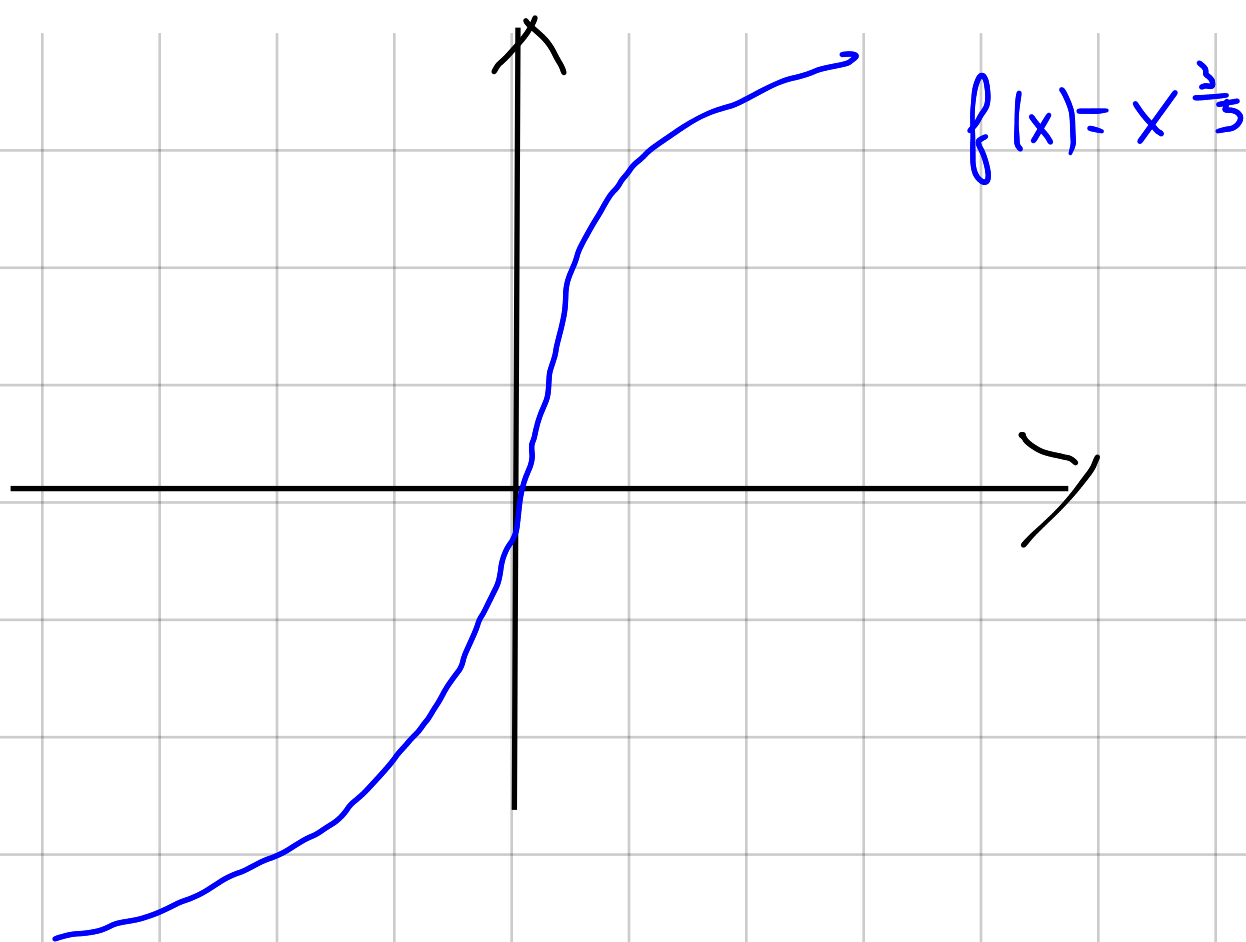
$$f''(x) > 0 \quad \text{PER } x < 0 \Rightarrow f \text{ CONVESSA IN } (-\infty, 0)$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{PER } x > 0 \Rightarrow f \text{ CONCAVA IN } (0, \infty)$$

ALLORA $x=0$ È UN PUNTO DI

FLESSO IN CUI LA FUNZ. NON È

DERIVABILE



SE f È DEFINITA SU UN INTERVALLO
O VARIANTE DI INTERVALLI È INTERESSANTE
CALCOLARE I LIMITI DELLA FUNZIONE
AGLI ESTREMI DEI VARI INTERVALLI
OVVIAMENTE SE ABBIAMO UN INTERVALLO
DEL TIPO (a, b) CONSIDEREREMO

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

MENTRE SE f RISULTERÀ DEFINITA IN
INTERVALLI DEL TIPO $(a, +\infty)$ O $(-\infty, b)$
CONSIDEREREMO ANCHE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ESEMPIO $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x-1}} + \frac{1}{|x-3|}$

$D_f \quad x \neq 3 \quad \frac{x^2-4}{x-1} \geq 0 \rightarrow$

$x \neq 3 \quad x \geq 2 \quad -2 \leq x < 1$

$D_f = [-2, 1) \cup [2, 3) \cup (3, \infty)$

HA SEI SE CONSIDERARE

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = \frac{1}{5} \quad (f \text{ CONTINUA IN } x = -2)$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 1 \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{x^2-4}{x-1}} + \frac{1}{|x-3|} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x-1}} + \frac{1}{|x-3|} = +\infty$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = +\infty$

Def Sia f definita in (a, b) se
 $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ($-\infty$)

($\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ ($-\infty$))

$x=a$ si dice asintoto verticale
 destro di f

($x=b$ si dice asintoto verticale
 sinistro di f)

Nell'esercizio precedente $x=1$

$\exists$ un asintoto verticale
 sinistro

$x=3$ $\exists$ asint. verticale sia destro
 che sinistro