

ESEMPIO $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x-1}} + \frac{1}{|x-3|}$

D_f $x \neq 3$ $\frac{x^2-4}{x-1} \geq 0 \rightarrow$

$x \neq 3$ $x \geq 2$ $-2 \leq x < 1$

$D_f = [-2, 1) \cup [2, 3) \cup (3, \infty)$

HA SEI SUO CONSIDERARE

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = \frac{1}{5}$ (f CONTINUA IN $x = -2$)

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 1$ - - - - -

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{x^2-4}{x-1}} + \frac{1}{|x-3|} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x-1}} + \frac{1}{|x-3|} = +\infty$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = +\infty$

Def Sia f definita in (a, b) se
 $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty (-\infty)$

($\exists \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty (-\infty)$)

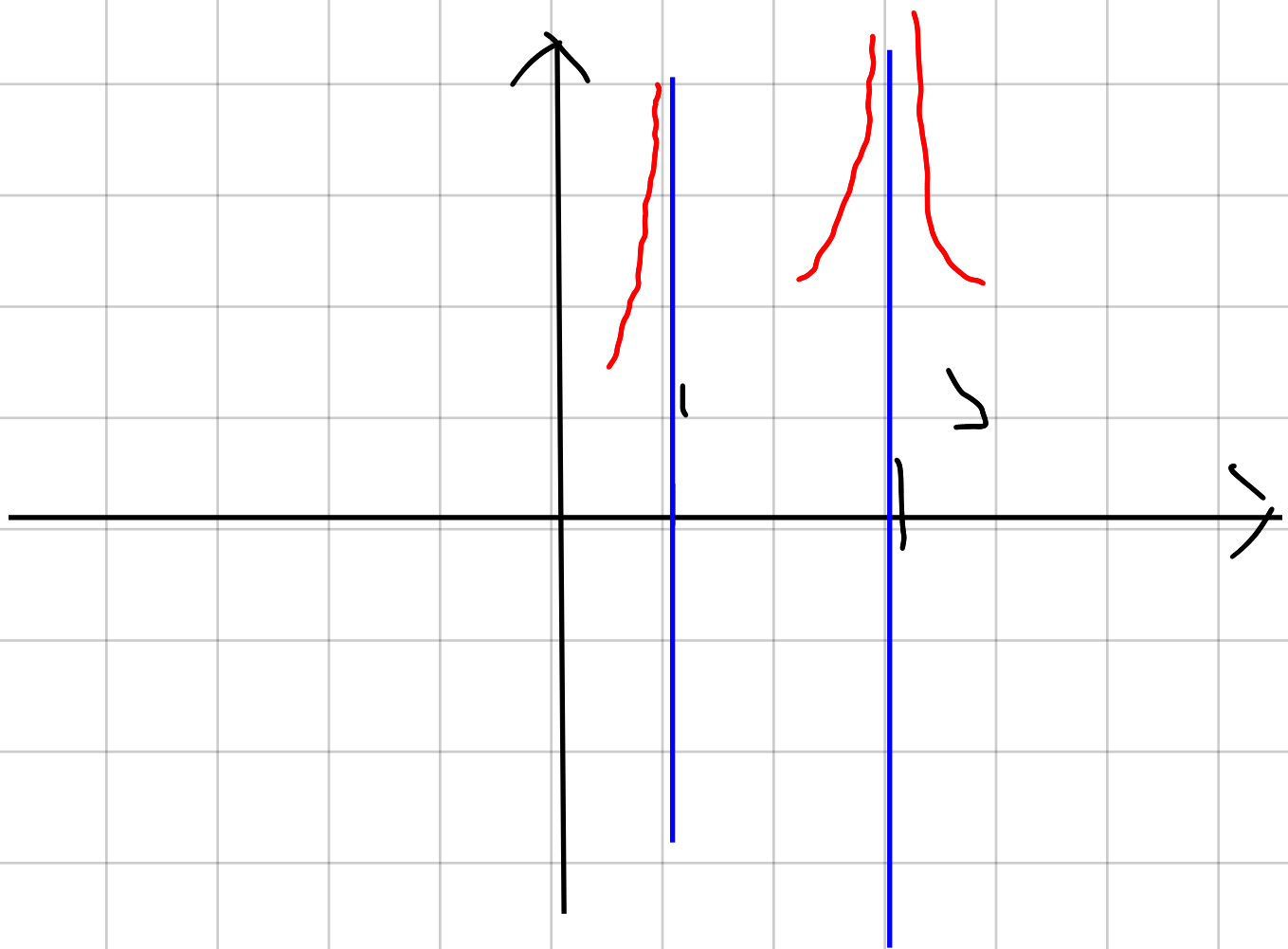
$x=a$ si dice asintoto verticale
 destro di f

($x=b$ si dice asintoto verticale
 sinistro di f)

Nell'esercizio precedente $x=1$

$\exists$ un asintoto verticale
 sinistro

$x=3$ $\exists$ asint. verticale sia destro
 che sinistro



PER STUDIARE BENE L'ANDAMENTO
 DOVREMMO STUDIARE $f'(x)$ E
 $f''(x)$

SIA $f(x)$ DEFINITA IN
 (a, ∞) $[(-\infty, b)]$

SE $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$
 $[\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}]$

ALLORA LA RETTA $y = l$ SI DICE
 ASINTOTTO ORIZZONTALE DI f PER
 x CHE TENDE A $+\infty$

[ASINT. ORIZZ. DI f PER x
 CHE TENDE A $-\infty$]

ESEMPIO $f(x) = \arctan(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

$y = \frac{\pi}{2}$ ASINT. ORIZZ. PER x CHE TENDI A $+\infty$

$y = -\frac{\pi}{2}$ - - - - - $-\infty$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

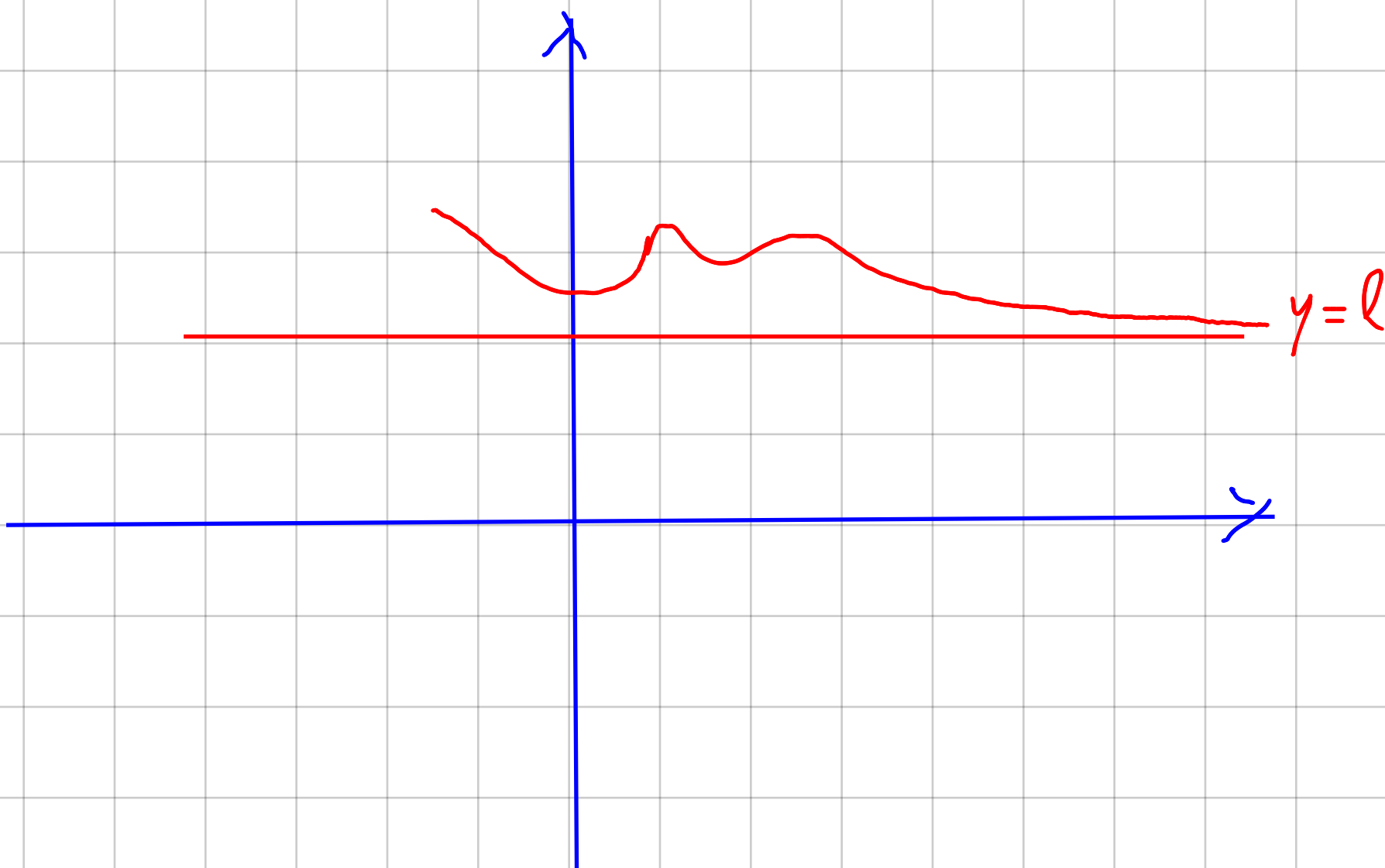
$$y = -1 \quad \text{ASINT.} \quad \cup \cap \setminus \text{Z.} \quad A \quad +\infty \quad E \quad -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -2} |f(x)| = +\infty$$

$$x = 2 \quad \text{e} \quad x = -2 \quad \text{ASINT.} \quad \text{VERTICAL}$$

$$f(x) = e^x \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$y = 0 \quad \text{ASINT.} \quad \cup \cap \setminus \text{Z.} \quad A \quad -\infty$$



SIA f DEFINITA IN $(a, +\infty)$ $[(-\infty, b)]$

$y = mx + q$ ($m \neq 0$) SI DICE ASINTOTO OBLIQUO

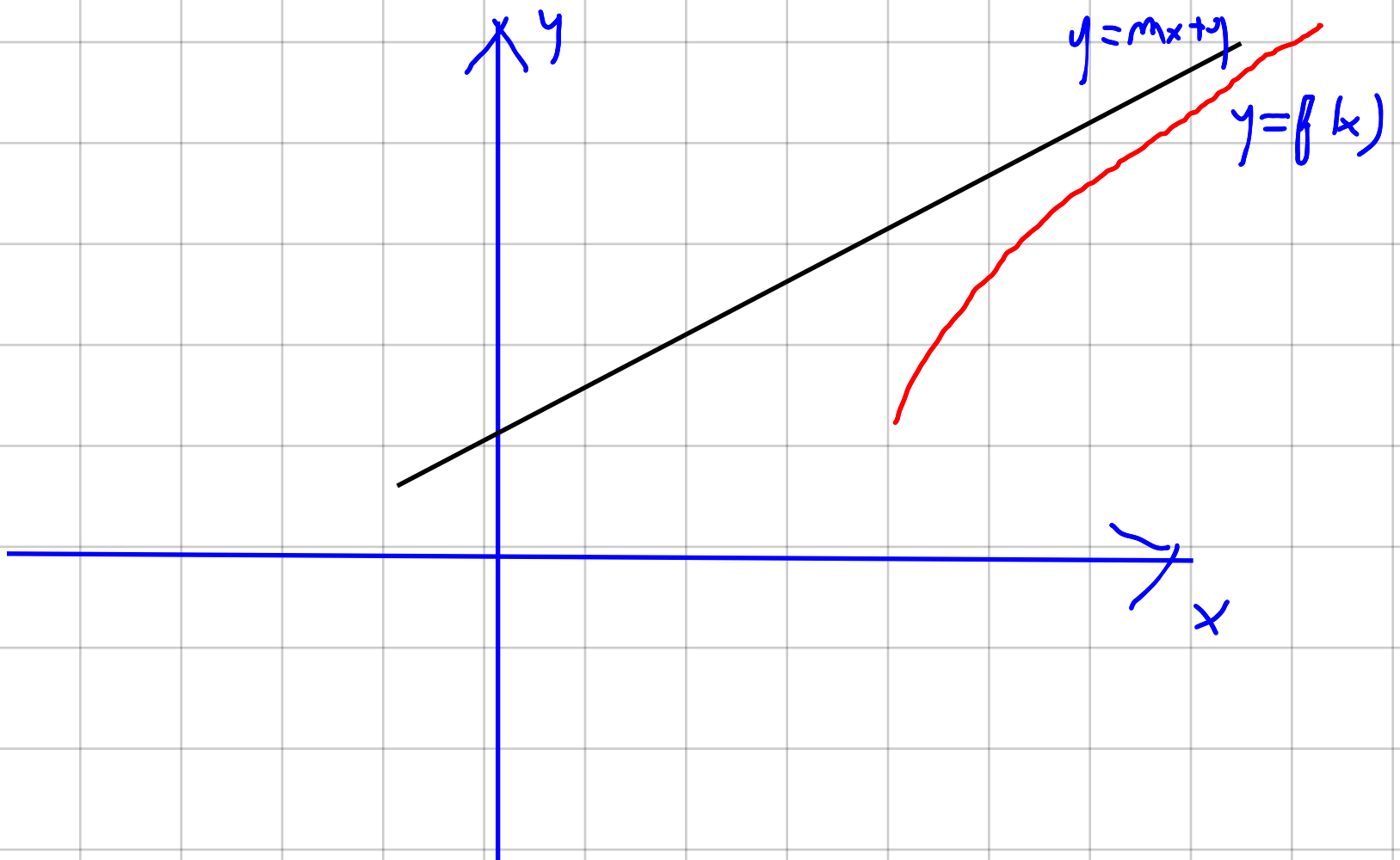
PER x CHE TENDONO A $+\infty$ [ASINT. OBLIQUO
PER x CHE TENDONO A $-\infty$] SE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (mx + q) = 0 \quad \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (mx + q) = 0 \right]$$

IN ALTRE PAROLE SE IL GRAFICO DELLA

FUNZIONE SI AVVICINA ALLA RETTA $y = mx + q$

PER x CHE TENDONO A $+\infty$ O $-\infty$



$$\frac{x^2}{e^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{IPERBOLLE}$$

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{e^2} - 1}$$

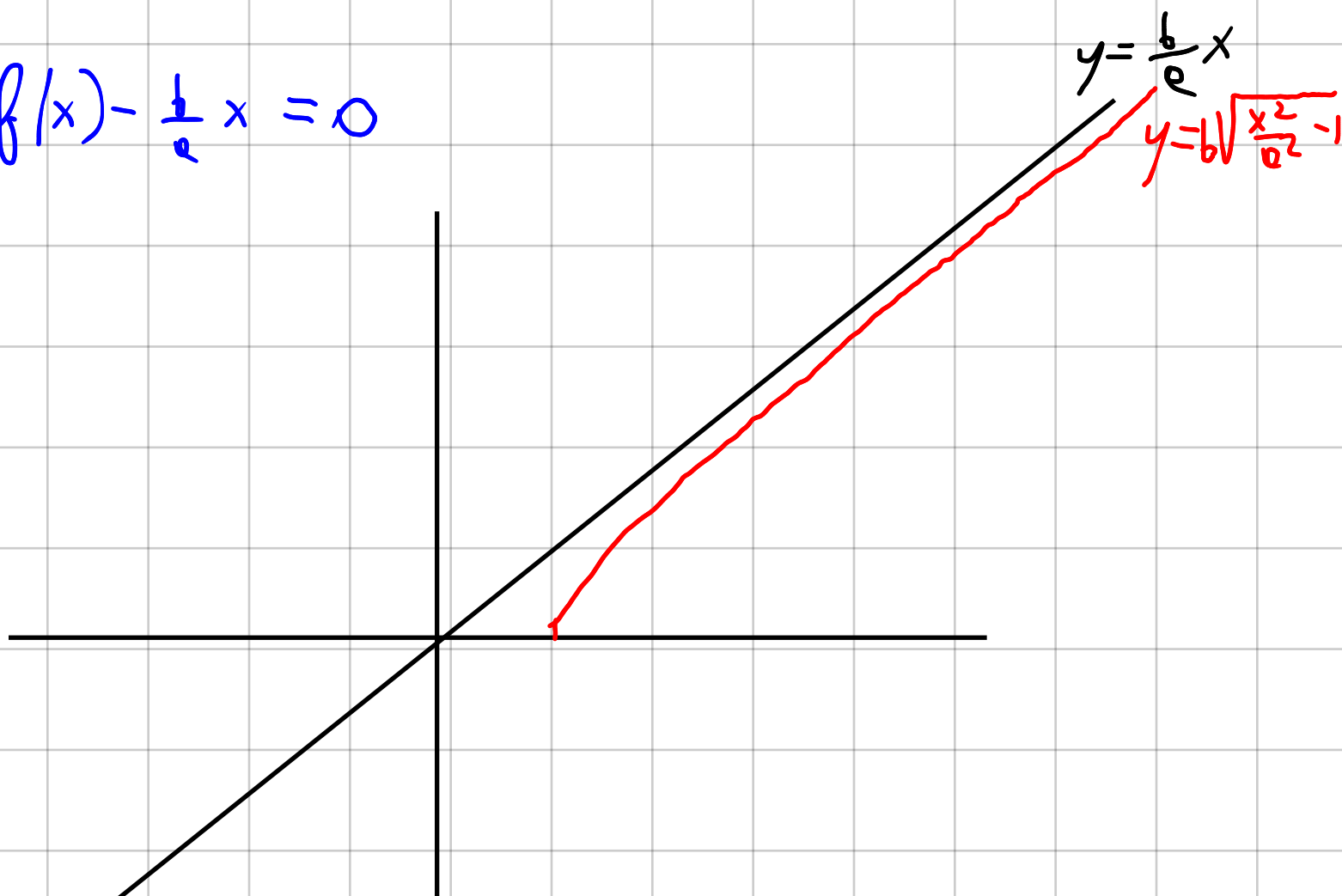
SE CONSIDERIAMO LA FUNZIONE

$$f(x) = b \sqrt{\frac{x^2}{e^2} - 1} \quad \text{PER } x > e$$

OSSERVIAMO CHE

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{b}{e}x &= \frac{\left(b \sqrt{\frac{x^2}{e^2} - 1} - \frac{b}{e}x\right) \left(b \sqrt{\frac{x^2}{e^2} - 1} + \frac{b}{e}x\right)}{\left(b \sqrt{\frac{x^2}{e^2} - 1} + \frac{b}{e}x\right)} \\ &= \frac{\cancel{\frac{b^2}{e^2}x^2} - b^2 - \cancel{\frac{b^2}{e^2}x^2}}{\left(b \sqrt{\frac{x^2}{e^2} - 1} + \frac{b}{e}x\right)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{b}{e}x = 0$$



$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-3} \quad \text{ASINTOT?}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+1}{x-3} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+1}{x-3} = -\infty \quad x=3$$

ASINT. VERTICALE

$$\frac{x^2+1}{x-3} = \frac{x^2-3x+3x+1}{x-3} = x + \frac{3x+1}{x-3} = x+3 + \frac{10}{x-3}$$

$$\Rightarrow f(x) - (x+3) = \frac{10}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - (x+3) = 0$$

$$y = x+3$$

ASINT. OBLIQUE

$$A + \infty \in$$

ASINT. OBLIQUE <A> DIVISORE

$$f(x) = e^{-x} - x + 1$$

$$y = 1 - x$$

ASINT.

OBLIQUE

PER

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f(x) - (1-x) = e^{-x} - x + 1 - 1 + x = e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (1-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

COSA

SUCCESSO

$$A = 0?$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} - x + 1 = +\infty \quad (+\infty + \infty)$$

ASINTOT

OBLIQUE

?

COME SI FA A DIRE SE $\exists$ ASINTOT.
OBBLIGATO?

OSSERVAZIONE: VEDIAMO A $+\infty$ (PER $-\infty$ È LA STESSA COSA)

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ NON NECESSARIAMENTE

2) SE $\exists m \neq 0$ E q t.c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx - q = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = 0 \quad (\text{SAREBBE } \frac{0}{\infty})$$

DA CUI OTTIENIAMO

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} = 0 \quad \text{NOTA CHE } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{q}{x} = 0$$

NECESSARIAMENTE SI HA $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0$

$$\text{DA CUI } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

QUINDI UNA C/A NECESS. AFFLUCHE' CI SA

ASINT. OBBLIGATO PER $x \rightarrow +\infty$ E' CHE

$$\exists f \text{ t.c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ CHE HA ASINT.}$$

DIVERSO DA $2 \text{ E } 0$

INOLTRE $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ FORNISCE IL POSSIBILE

VALORE m DELL'ASINT. OBBLIGATO

3) SE AL PUNTO 2) ABBIAMO TROVATO

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

CONSIDERIAMO

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx \quad \text{SE} \quad \text{QUESTO ESISTE}$$

FINITO, UGUALE AD UN VALORE q

ALLORA NECESSARIAMENTE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx - q = 0 \quad \text{E} \quad y = mx + q \quad \text{E'}$$

ASINT. OBLIQUO

$$\text{SE} \quad \nexists \text{ FINITO } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx \Rightarrow$$

NON PUO' ESSERE ASINT. OBLIQUO

ESEMPIO PRECEDENTE

$$f(x) = e^{-x} - x + 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - x + 1}{x} = -1 \quad (m = -1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - x + 1 + x}{-(mx)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + 1 = 1 \quad \rightarrow q = 1$$

$y = -x + 1$ ASINT. OBLIQUO A $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} - x + 1}{x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ HOPITAL} \right) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x} - 1}{1} = -\infty$$

$\Rightarrow \nexists$ ASINT. OBLIQUO PER $x \rightarrow -\infty$

$$f(x) = \frac{2xe^x + 1}{e^x - 4}$$

ASINT. ?

$$D_f \quad e^x - 4 \neq 0 \quad x \neq \ln 4 \quad \mathbb{R} \setminus \{\ln(4)\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 4} \left| \frac{2xe^x + 1}{e^x - 4} \right| = +\infty \quad x = \ln 4 \quad \text{ASINT. VERT.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xe^x + 1}{xe^x - 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{xe^x} \frac{2 + \frac{1}{xe^x}}{1 - \frac{4}{e^x}} = 2$$

$$\text{se } \exists m = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xe^x + 1 - 2xe^x + 8x}{e^x - 4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{e^x - 4} = 0 \Rightarrow 0/0$$

ALLORA $y = 2x \in \mathbb{R}$
ASINT. obliqua

PER $x \rightarrow +\infty$

$-\infty$?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2xe^x + 1}{e^x - 4} = -\frac{1}{4}$$

INFATTI

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

PERCHÉ?

$$y = -x$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} (-y) e^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-y}{e^y} = 0$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4} \quad \text{ASINT. ORIZ. PER } x \rightarrow -\infty$$

$$x = \ln(4) \quad \text{ASINT. VERT}$$

$$y = 2x \quad \text{ASINT. OBLIQUO PER X CHE TENDE A } +\infty$$

$$y = -\frac{1}{4} \quad \text{ASINT. ORIZZONTALE PER X CHE TENDE A } -\infty$$