

# GRAFICO DI FUNZIONE

DATA LA FUNZIONE  $f(x)$  SONO MOLTE  
LE COSE CHE POSSIAMO "PROVARE" A FARE  
PER RAPPRESENTARLA GRAFICAMENTE

①  $f$

i) DOMINIO DI DEFINIZIONE

ii) SIMMETRIE:  $f$  PARI? DISPARI?

PERIODICA?

iii) INTERSEZIONE CON GLI ASSI SE  $0 \in D_f$   
(0,  $f(0)$ ) INTERSECA L'ASSE DELLE  $y$

INVECE, PUNTI CHE INTERSECA L'ASSE DELLE  
 $x$  SI TROVANO RISOLVENDO L'EQUAZIONE

$f(x)=0$  IN QUESTO CONTESTO POSSIAMO

ANCHÉ STUDIARE LA DISEG  $f(x) > 0$

PER VEDERE IN QUALI INSIEMI  $f$  RISULTA

POSITIVA

iii) LIMITI AGLI ESTREMI, RICERCA  
DI EVENTUALI ASINTOTI

INSIEME DI CONTINUITA' DI  $f$  E CLASSIFICAZIONE  
DEGLI EVENTUALI PUNTI DI DISCONTINUITA'

(2)  $f'$

i) INSIEME DI DERIVABILITA' E CALCOLO  
DELLA DERIVATA PRIMA, EVENTUALI PUNTI A TANGENTE  
VERTICALE E PUNTI IN CUI IL LIMITE DEL  
RAPPORTO INCREMENTALE DESTRO E SINISTRO NON COINCIDONO

ii) STUDIO DELL'EQUAZIONE  $f'(x) = 0$   
E DELLA DISEQ  $f'(x) > 0$   
QUINDI DETERMINARE INSIEMI DI CRESCENZA  
E DECRESCENZA DELLA FUNZ.

QUINDI PUNTI DI MINIMO E MASSIMO RELATIVO  
E QUINDI IL VALORE DI TALI MASSIMI E MINIMI  
RELATIVI

(3)  $f''$

i) INSIEME DI  $\exists$  DELLA DERIVATA SECONDA  $f''(x)$   
E CALCOLO

ii) STUDIO DI  $f''(x) = 0$  E  $f''(x) > 0$

DETERMINARE INTERVALLI DI CONVESSITA', CONCAVITA' E FLESSI

## DISEGNO DEL GRAFICO

$$f(x) = |\ln|x|| + \frac{1}{x^2}$$

$$\textcircled{1} D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

$$f \text{ E' PAR!} \quad f(-x) = |\ln|-x|| + \frac{1}{(-x)^2} = f(x)$$

LA STUDIAMO IN  $(0, \infty)$

$f(x) > 0 \quad \forall x$  ESSENDO SOMMA DI FUNZ.  
POSITIVE

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |\ln(x)| + \frac{1}{x^2} = +\infty \quad (+\infty + \infty)$$

$x=0$  ASINT. VERTICALE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |\ln(x)| + \frac{1}{x^2} = +\infty \quad (+\infty + 0)$$

ASINT. OBLIQUA?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\ln(x)|}{x} + \frac{1}{x^3} = 0 \quad \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \right)$$

NO ASINT. OBLIQUA

$f'(x) ! \boxed{x > 0}$  SAPPIAMO CHE  $\ln(x)$  E'  
DERIVABILE  $\forall x > 0$   $\frac{1}{x^2}$  E' DERIVABILE PER  $x \neq 0$

LA FUNZ.  $|y|$  E' DERIV. SE  $y \neq 0$ !

MAI/DI PER POTER APPLICARE LA FORMULA  
DI DERIVAZIONE DI FUNZ. COMPOSTA E'  
NECESSARIO CHE  $\ln(x) \neq 0$  ( $|\ln(x)|$ )  
OVVERO  $x \neq 1$

PER CUI POSSIAMO DIRE CHE  $f$  E'  
SICURAMENTE DERIVABILE IN  $(0, \infty) \setminus \{1\}$

$[(-\infty, 0) \setminus \{-1\}]$  E' PARI!

$$|y|' = \text{sgn}(y) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \text{sgn}(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} = \begin{cases} -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} & x > 1 \end{cases}$$

$$0 < x < 1 \quad \text{SI HA} \quad f'(x) < 0$$

$$x > 1 \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{2}{x^3} \Leftrightarrow x^3 > 2x \quad (x > 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 2 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x > \sqrt{2}$$

$$\forall x > 1 \quad f'(x) < 0 \quad \text{IN} \quad (1, \sqrt{2})$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{IN} \quad (\sqrt{2}, \infty)$$

$\rightarrow \sqrt{2}$  PUNTO  
di MINIMO

$$f(\sqrt{7}) = |\ln(\sqrt{7})| + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln(7) + \frac{1}{2} = \frac{\ln(7) + 1}{2}$$

$f$  è DERIVABILE in  $x=1$ ?

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -1$$

$$\sim \text{no!} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -1$$

$x=1$  PUNTO DI CUSPIDE LE TANGENTI DA UN LATO E DALL'ALTRO DI  $x=1$  SONO DIVERSE

$f''(x)$ ? COME NEL PUNTO PRIMA  $f'' \exists$

SE  $x \in (0, \infty) \setminus \{1\} \quad [(-\infty, 0) \setminus \{-1\}]$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4} & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^4} & x > 1 \end{cases}$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{in } (0, 1)$$

$$\text{PER } x > 1 \quad f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{6}{x^4} - \frac{1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 < 6$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < \sqrt{6}$$

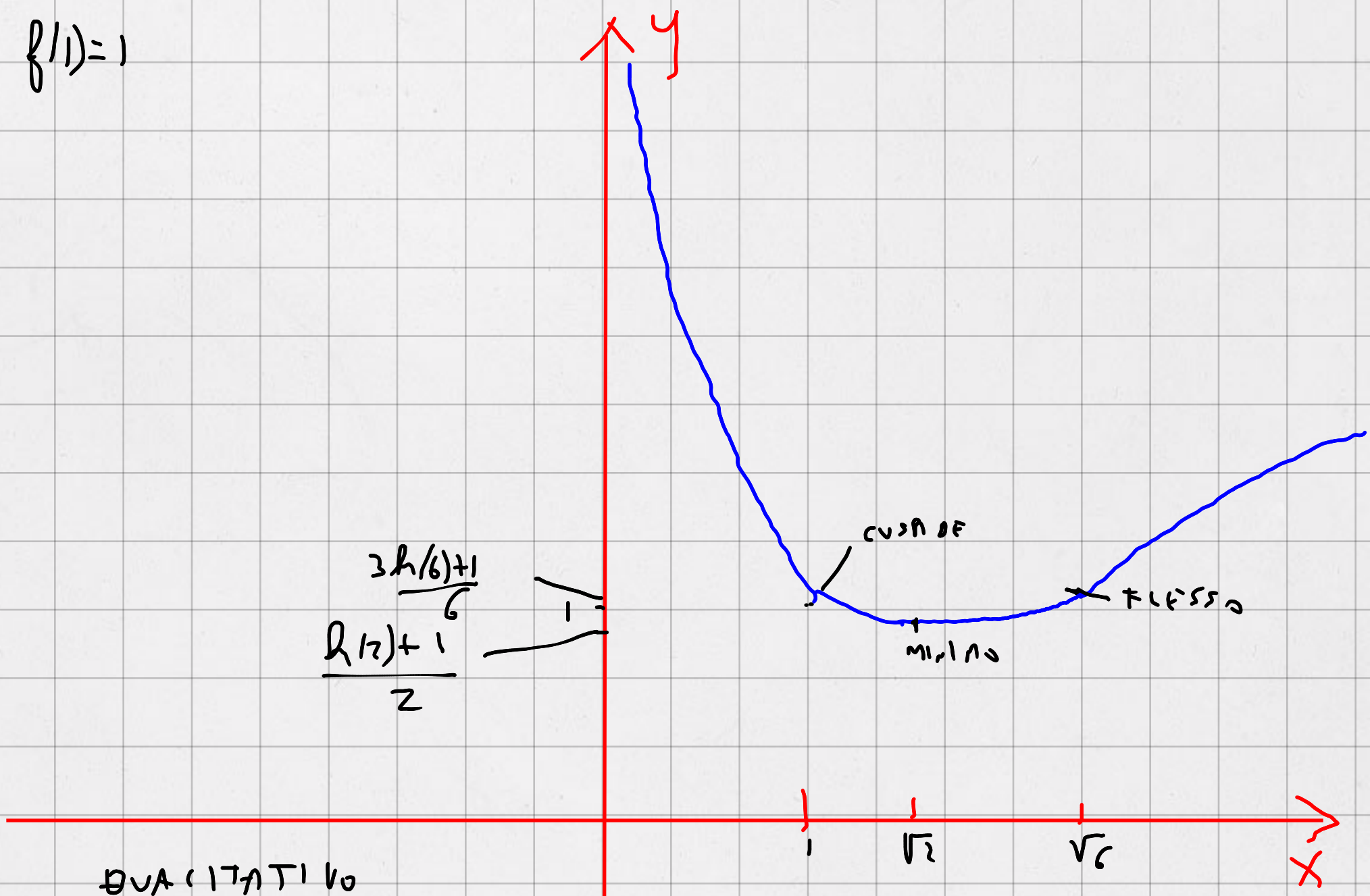
$\Rightarrow$  in  $(0, 1)$  e  $(1, \sqrt{6})$   $f$  CONVESSA, in  $(\sqrt{6}, \infty)$   $f$  CONCAVA

$x = \sqrt{6}$  punto di flesso

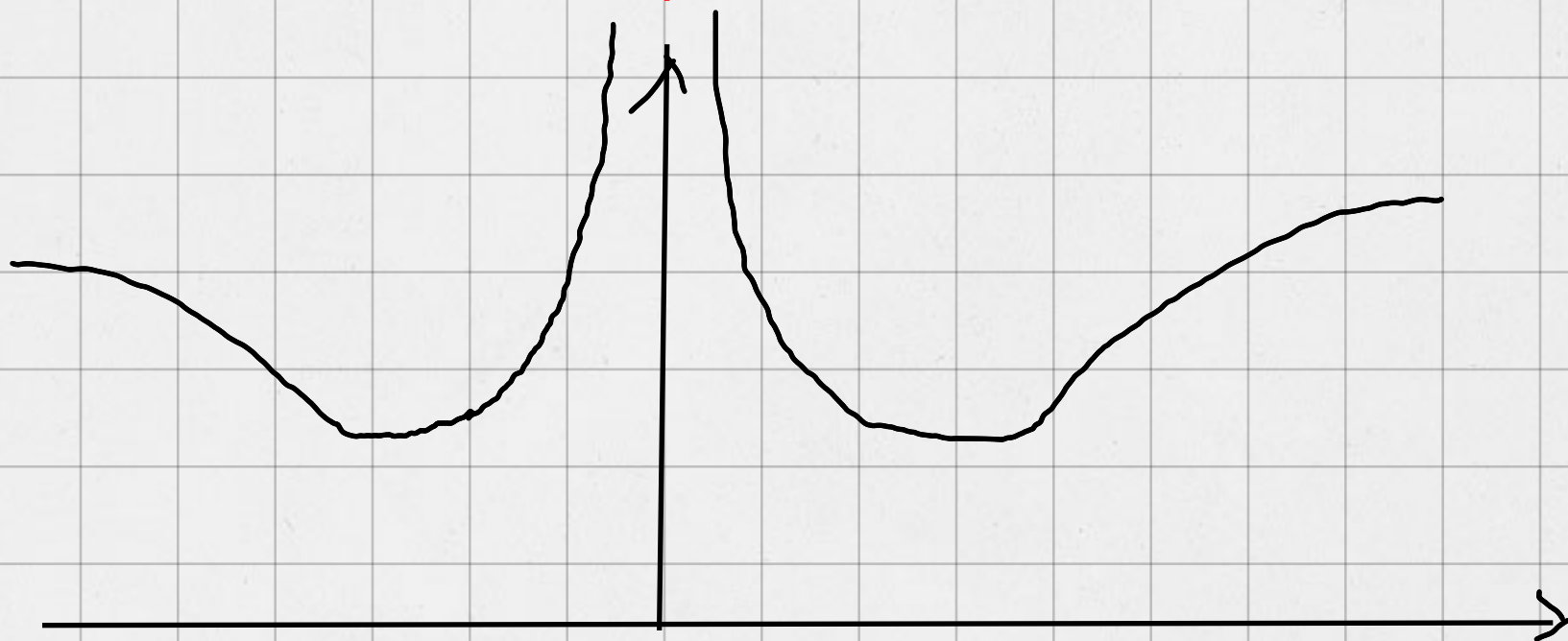
$$f(\sqrt{6}) = \ln(\sqrt{6}) + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{6} = \frac{3\ln(6) + 1}{6}$$

GRAFICO?

$$f(1) = 1$$



GRAFICO



$$f(x) = x e^{-x}$$

1)  $D_f = \mathbb{R}$   $f$  non pari, non dispari, non periodica

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ ASINT. ORIZZ.}$$

PER  $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty \quad (-\infty \cdot (+\infty))$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ non ASINT. OBBLICUA}$$

$$f'(x) \text{ DEFINITA IN } \mathbb{R} \quad f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x) e^{-x}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \rightarrow f \text{ cresce in } (-\infty, 1)$$

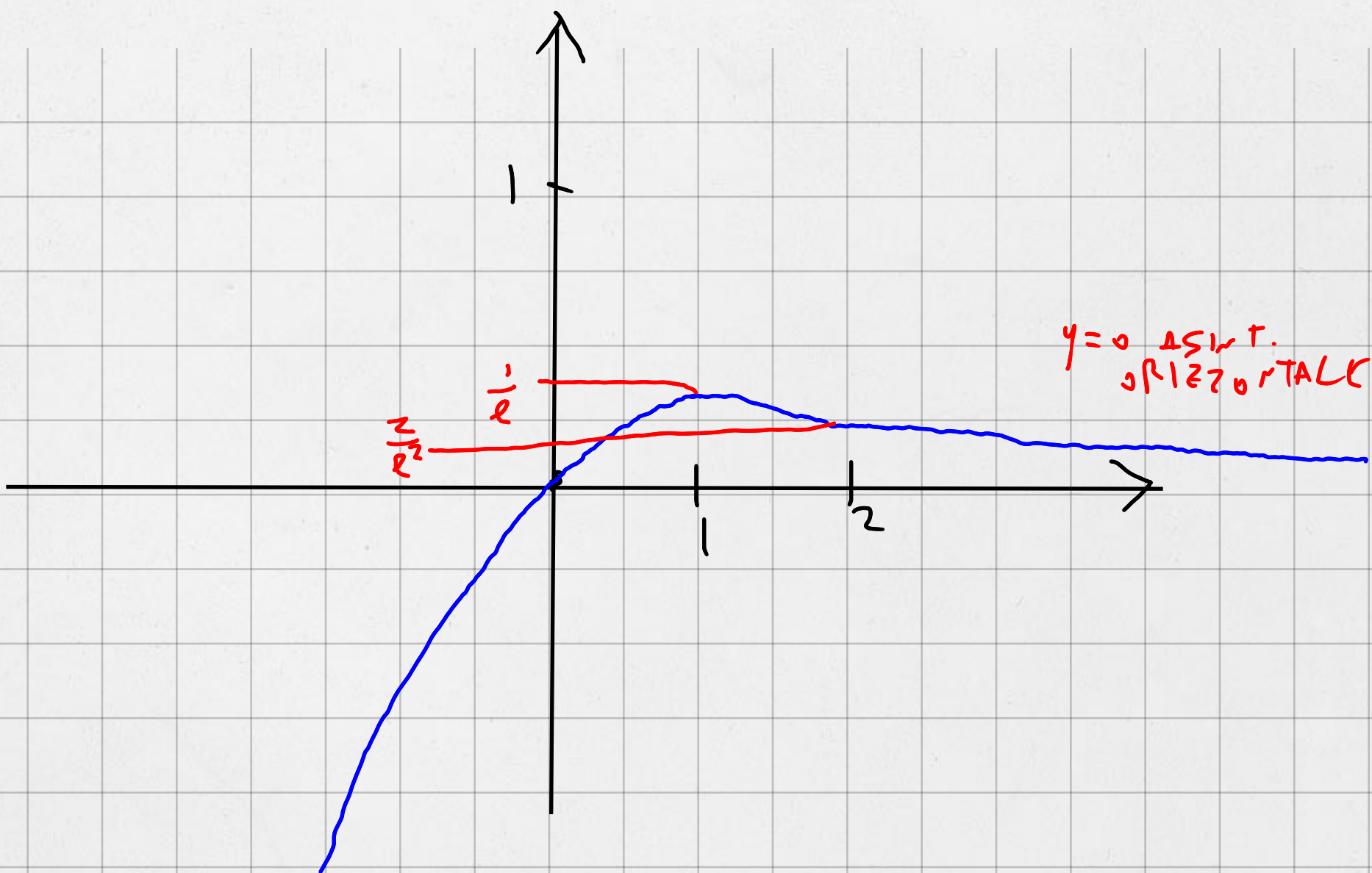
$$\text{DECRESCERE in } (1, \infty) \rightarrow x=1 \text{ punto di MASSIMO RELATIVO} \quad f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$f'' \exists \text{ in TUTTO } \mathbb{R}$$

$$f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x} = e^{-x}(x-2) \rightarrow$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2 \quad f \text{ CONCAVA in } (2, \infty)$$

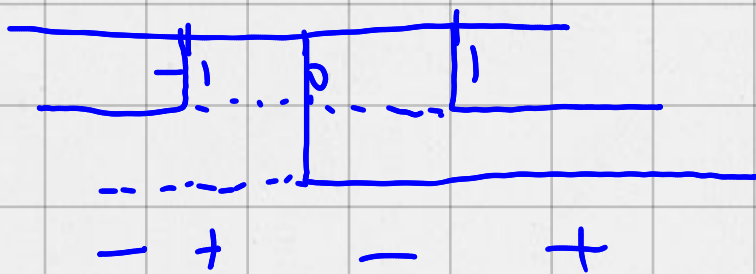
$$f \text{ CONCAVA in } (-\infty, 2) \rightarrow x=2 \text{ punto di MINIMO RELATIVO} \quad f(2) = 2e^{-2}$$



$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

$$f \text{ DISPARI} \quad f(-x) = -f(x)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad f(x) > 0 ?$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ASINT. ORIZ.}$$

$$A + 0 \quad F - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$f' \quad \exists \quad \sim \quad \text{TOT} \quad D_f$$

$$f'(x) = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$\text{NUMERATORE} < 0 \quad \forall x \in D_f$$

$$\text{DENOMINATORE} > 0 \quad \forall x \in D_f$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in D_f$$

$$\exists \quad \text{MAX} \quad \text{O} \quad \text{MIN} \quad \text{RELATIVI}$$

$$f'' \quad \exists \quad \sim \quad D_f$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2-1)^2 + (x^2+1)2x \cdot 2(x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-1)[1-x^2+2x^2+2]}{(x^2-1)^4} = \frac{2x[x^2+3]}{(x^2-1)^3}$$

$$f'' > 0 \quad \text{LO} \quad \text{ST} \neq \text{SSO} \quad \text{SE} \quad \text{O} \sim 0 \quad \text{O} \quad f$$

$$f \text{ CONVESSA} \quad \sim \quad (-1, 0) \cup (1, \infty)$$

$$f \text{ CONCAVA} \quad (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

$$\Rightarrow x=0 \quad \text{PUNTO DI FLESSO}$$

