

SUCCESIONI NUMERICHE

SIA $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ DOMINIO $\mathbb{N}$

GLI ELEMENTI IMMAGINE DI UNA TALE FUNZIONE SONO $f(0), f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$

CHIAMIAMO GLI ELEMENTI IMMAGINE DELLA FUNZIONE DEFINITA SU $\mathbb{N}$, SUCCESSIONE NUMERICA

IN GENERALE GLI ELEMENTI DELLA SUCCESSIONE SI INDICANO CON $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ DOVE Q_n CORRISPONDE

A $f(n)$, DUNQUE POSSIAMO PENSARE $Q_n = f(n)$

CON IL SIMBOLO $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ INDICHIAMO GLI ELEMENTI

CHE COMpongono LA SUCCESSIONE TENENDO CONTO

CHE IL GENERICO ELEMENTO Q_n CORRISPONDE AD

n .

PER LE SUCCESSIONI È INTERESSANTE

STUDIARE L'ANDAMENTO AL VARIARE DI n

OUVVIAMENTE NON HA SENSO VEDERE COSA SUCCIDE

"VICINO" AD UN $\bar{m}$ FISSATO IN QUANTO LA

FUNZIONE NON È DEFINITA IN UN INTORNO DI UN
NATURALE FISSATO

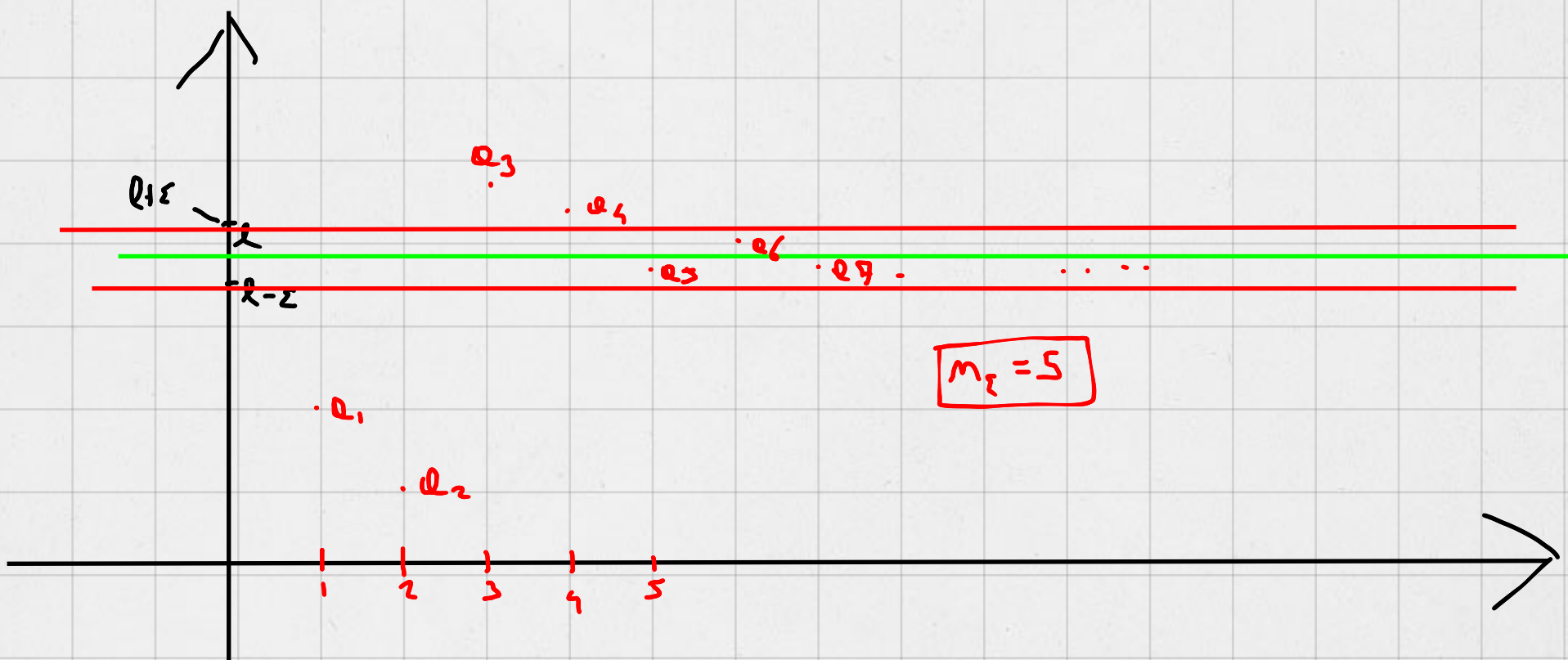
L'UNICO LIMITE CHE HA INTERESSE FARE È

QUELLO PER n CHE TENDI A $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = ?$$

Def $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \text{ t.c.}$

$$\forall n \geq n_\varepsilon \quad |a_n - l| < \varepsilon$$



ES $Q_n = \frac{n+1}{n+2}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = ?$

$Q_0 = \frac{1}{2}$ $Q_1 = \frac{2}{3}$ $Q_2 = \frac{3}{4}$ $Q_3 = \frac{4}{5}$ $\dots \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = 1?$

$$\left| \frac{n+1}{n+2} - 1 \right| = \left| \frac{n+1-n-2}{n+2} \right| = \left| \frac{-1}{n+2} \right| = \frac{1}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

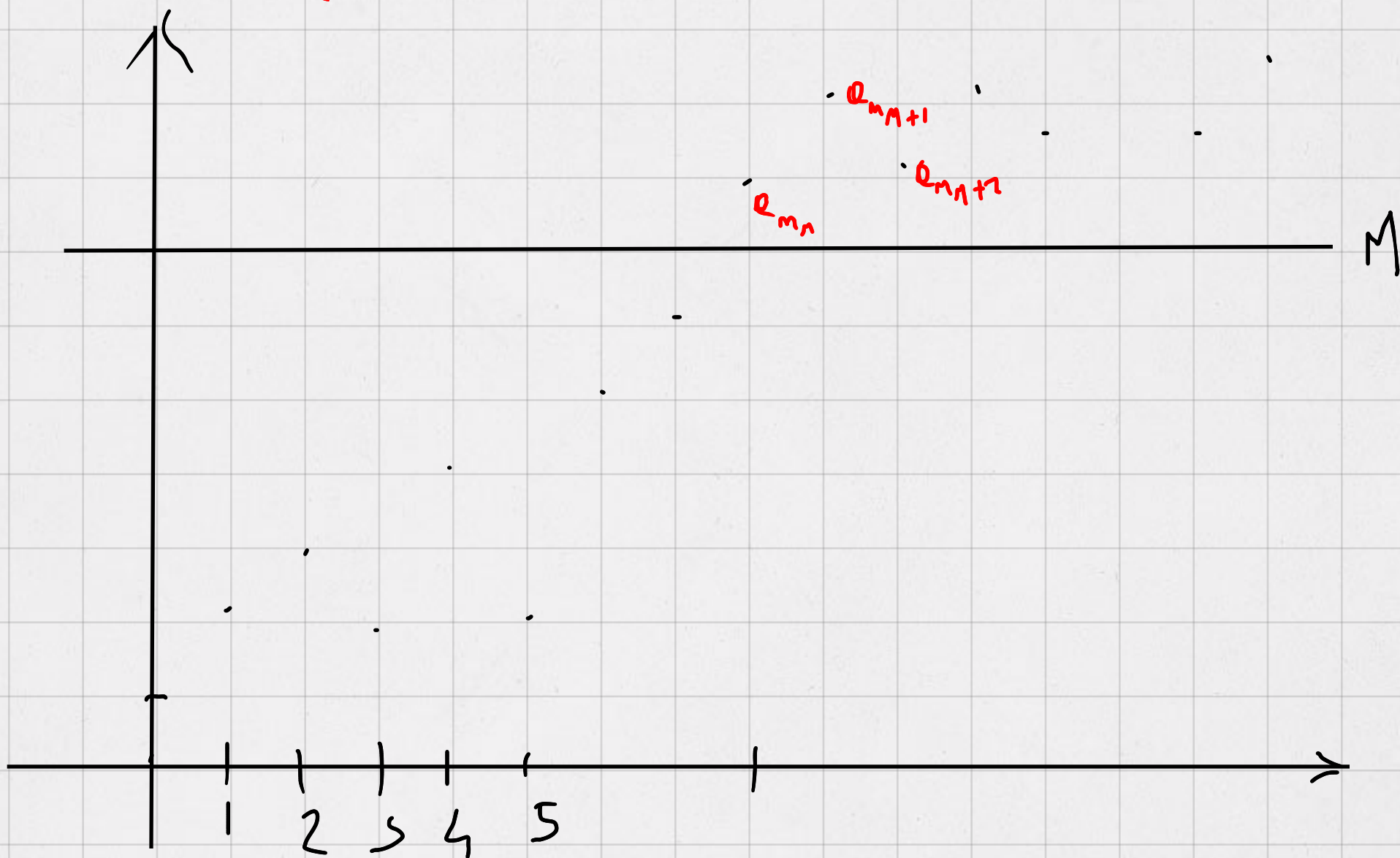
$$\Leftrightarrow n+2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 2, \exists n_\varepsilon?$$

BASTA PRENDERE $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2 \right] + 1$ ($[x]$ PARTE INTERA)

Def $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = +\infty$ ($-\infty$)

sì $\forall M > 0 \exists n_M$ t.c. $\forall n \geq n_M$

$Q_n > M$ ($Q_n < -M$)



$$\text{ES } Q_n = \frac{n^2+3}{n+1}$$

$$Q_0 = 3 \quad Q_1 = \frac{4}{2} = 2, \quad Q_2 = \frac{7}{3}, \dots Q_{10} = \frac{103}{11} \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+3}{n+1} = +\infty ?$$

$$\left| \frac{n^2+3}{n+1} \right| > M \Leftrightarrow n^2+3 > Mn+M \quad \text{DISEQ } x^2-Mx+3-M > 0$$

$$x = \frac{M \pm \sqrt{M^2+4M-12}}{2} \quad \text{DUBBIO SE } M^2+4M-12 < 0 \text{ E' SEMPRE VERO}$$

$$\text{MENTRE SE } M^2+4M-12 \geq 0 \quad \text{BASTA PRENDERE}$$

$$x > \frac{M + \sqrt{M^2+4M-12}}{2} \quad \text{TORNANDO ALLA SUCCESSIOE}$$

$$\text{BASTA PRENDERE } \left\lceil \frac{M + \sqrt{M^2+4M-12}}{2} \right\rceil + 1 = n_n$$

OVVIAAMENTE IL CONCETTO DI LIMITE SI PUO'

DEFINIRE SE LA SUCCESSIOE NON E' DEFINITA
SU N MA DA UN CERTO $\bar{m}$ IN POI
AD ESEMPIO HA SENSO CONSIDERARE

$$Q_n = \sqrt{n-4} \quad \text{DEFINITA } \forall n \geq 4$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n-4} = +\infty \quad (\text{PROVATE!})$$

Def $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice STRETT. CRESC.

CRESC.
STRETT. DECRE.
DECRESC.

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$

$$Q_{n+1} > Q_n$$

$$Q_{n+1} \geq Q_n$$

$$Q_{n+1} < Q_n$$

$$Q_{n+1} \leq Q_n$$

ESEMPLO $Q_n = \frac{1}{n+1}$

$$Q_{n+1} = \frac{1}{n+1+1} \rightarrow Q_{n+1} < Q_n ?$$

$$\frac{1}{n+1+1} < \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow n+1 < n+2 \Leftrightarrow 1 < 2 !$$

$$Q_n = n^2 - 2n + 7$$

$$Q_{n+1} = (n+1)^2 - 2(n+1) + 7 \quad Q_{n+1} > Q_n \quad \forall n \geq 0 ?$$

$$Q_{n+1} > Q_n \rightarrow (n+1)^2 - 2(n+1) + 7 > n^2 - 2n + 7$$

$$\Leftrightarrow \cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{2n} - 2 + 7 > \cancel{n^2} - \cancel{2n} + 7$$

$$\Leftrightarrow 2n - 1 > 0 \quad 2n > 1 \quad \text{SE } n \geq 1 \text{ OK!}$$

$$\text{SE } n = 0 ? \quad Q_1 = 1 - 2 + 7 = 6 \quad Q_0 = 0 - 0 + 7 = 7$$

$$Q_1 < Q_0 !$$

1) ~~AVVERTI~~ CASO LA SUCCESSIVA

È STRETT. CRESC. $\forall n \geq 1$

SE UNA SUCCESSIONE È STRETT. CRES (CRESC, STRETT. DECR, DECRESC) $\forall n \geq \bar{n}$ $\bar{n} \in \mathbb{N}$

ALLORA LA SUCCESSIONE SI DICE DEFINITIVAMENTE STRETT. CRES. (CRES., STRETT. DECR., DECRESC.)

ANCHE PER ALTRE PROPRIETÀ DELLE SUCCESSIONI.

SI INTRODUCO IL CONCETTO DI DEFINITIVAMENTE

AD ESEMPIO $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ È DEFINIT. POSITIVA

SE $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n} \quad Q_n > 0$

$Q_n = \frac{n-3}{n+5}$ È DEFINIT. POSITIVA INFATTI

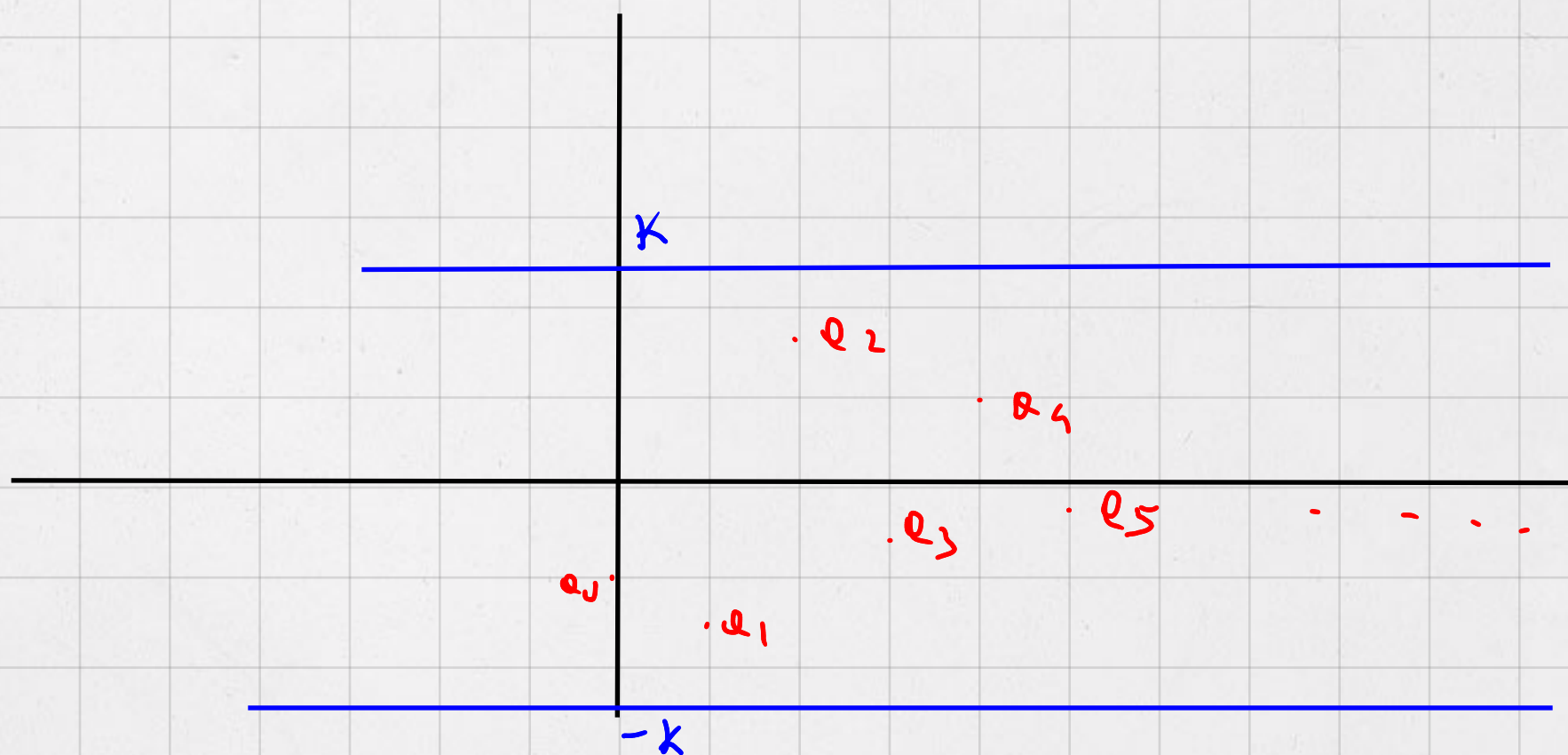
È POSITIVA $\forall n > 4$

PROP SE $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n$ QUESTO È UNICO
(STESSA DIMOSTRAZIONE DEL CASO DI FUNZ. REALE)

PROP SE $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = l > 0$ (ANCHE $l = +\infty$)

ALLORA LA SUCCESSIONE È DEFINITIV. POSITIVA.

Def $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice LIMITATA se $\exists k > 0$
t.c. $|a_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$



PROP se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ LIMITATA

NOTA PERE $\exists$ successioni LIMITATE PER
LE QUALI $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

ESEMPIO $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ PARI} \\ -1 & n \text{ DISPARI} \end{cases}$

E' LIMITATA, MA $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$

TEOREMA SIA $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ DEFINIT. MONOTONA

(STRET. CRESC., CRESC., STR. DECRESC., DECRESC.) ALLORA

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$|| \text{ LIMITE } l' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ } l'$$

LIMITATA

INOLTRE APPLICANDO

$$\text{SE } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ } l' \text{ CRESC. } \vee \text{ STRET. CRESC.}$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$$

$$\text{SE } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ } l' \text{ DECRESC. } \vee \text{ STRET. DECRESC.}$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$$

OSSERVAZIONE se $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è STRET. RCS.
 $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n < m \quad \text{si ha} \quad Q_n < Q_m$
 INFATTI

$$Q_n < Q_{n+1} < Q_{n+2} < \dots < Q_{m-1} < Q_m$$

Lo STESSO PER GLI ALTRI TIPI DI MONOTONIA

LEGAME TRA SUCCESSIONI E FUNZIONI
 DI VARIABILE REALE

SiA $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una SUCCESSIONE SiA

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad f(n) = Q_n$ ALLORA SE

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = l$$

DIMOSTRAZIONE BASTA IL QUANTO LA

RICHIESTA $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ È PIÙ FORTE DI

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = l.$$

INFATTI IL VICEVERSA È FALSO

$$Q_n = 1 \quad \forall n, \quad f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\pi\right)$$

$$f(n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 = Q_n \quad \forall n$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\pi\right)$$

LA PRECEDENTE PROPOSIZIONE È MOLTO UTILE
PER SEMPLIFICARE IL CALCOLO DEI LIMITI

ESEMPIO $Q_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2 + 5n + 2}$

prelato $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 5x + 2}$, $f(n) = Q_n$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 5x + 2} = 2$$

$Q_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \cdot (\sqrt{x^2 + 2x} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = 1$$

$Q_n = \frac{n^2 + 2}{n+3} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ ($n \geq 1$) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x+3} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x+3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 + 2}{2x^2 + 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(y)}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 + 2}{2x^2 + 3x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$Q_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - e^{\frac{1}{n}} + 1}{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}$ ($n \geq 1$) $f(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - e^{\frac{1}{x}} + 1}{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - e^{\frac{1}{x}} + 1}{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \frac{0}{0} \quad \frac{1}{x} = y$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(y) - e^y + 1}{1 - \cos(y)} \stackrel{(H)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\cos(y) - e^y}{1 + \sin(y)} \stackrel{(H)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-\sin(y) - e^y}{\cos(y)} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} Q_n = -1$$

DETERMINARE UNA FUNZIONE $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f(n) = a_n$
 PUO' ESSERE UTILE ANCHE PER DIMOSTRARE CHE UNA
 SUCCESSIONE E' MONOTONA

ESEMPIO $a_n = n^2 e^{\frac{1}{n}} \quad n \geq 1$

$$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} \quad f'(x) = 2x e^{\frac{1}{x}} - \frac{x^2}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = (2x - 1) e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \quad \text{PER CUI } f \text{ CRESC}$$

SE $x \geq 1$ LA PARTICOLARE $a_n = f(n)$ E' STR. CRESC.

$\forall n \geq 1$

I TEOREMI VISTI SU I LIMITI DI VARIABILE
 REALE VALGONO ANCHE PER I LIMITI DI

SUCCESSIONI

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = m$$

POSSIAMO CALCOLARE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + b_n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

FACENDO ATTENZIONE ALCHE FORME INDETERMINATE

$$+\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty$$

$$\text{es) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^3} = ? \quad \frac{\infty}{\infty}$$

AL SOLITO POSSIAMO A VARIABILE REALE $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^3} = +\infty$$

TEOREMA PONTE SIA f DEFINITA IN UN INTERVALLO
 DI $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ALLORA $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\Leftrightarrow \forall \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ t.c. } q_n \in D_f \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$q_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = x_0$$

$$\text{SI HA } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(q_n) = l$$

NOTA BENE E' UN SE E SOLO SE

DA UNA PARTE E' UTILE A CALCOLARE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(q_n) \text{ SE CIOSSIA MO } \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{n+2}{n^2+3}\right) = ?$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n^2+3} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{n+2}{n^2+3}\right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}-2} = e^{-2}$$

IN QUANTO

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 2 = -2$$

$$\text{E } \lim_{x \rightarrow -2} e^x = e^{-2}$$

1) PARTICOLARMENTE SE f È CONTINUA IN x_0

$\forall \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $a_n \in D_f$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0$ SI HA

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

UN'ALTRA APPLICAZIONE CI DICE CHE SE TROVIAMO 2
SUCCESSIONI $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = x_0 \quad \text{MA} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$$

ALLORA PER L'UNICITÀ DEL LIMITE $\nexists$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad !!!$$

INFATTI SE $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ DOVREBBE

$$\text{ESSERE} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = l$$

ESEMPIO $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x) = ? \quad f(x) = \sin(x)$

PRENDIAMO $a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad b_n = 2\pi n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$$

$$f(a_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = 1$$

$$f(b_n) = \sin(2\pi n) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = 0$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$$