

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^3} = +\infty$$

TEOREMA PONTE SIA f DEFINITA IN UN INTERVALLO
 DI $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ALLORA $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\Leftrightarrow \forall \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ t.c. } q_n \in D_f \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$q_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = x_0$$

$$\text{SI HA } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(q_n) = l$$

NOTA BENE E' UN SE E SOLO SE

DA UNA PARTE E' UTILE A CALCOLARE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(q_n) \text{ SE CONOSCIAMO } \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{n+2}{n^2+3}\right) = ?$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n^2+3} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{n+2}{n^2+3}\right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}-2} = e^{-2}$$

IN QUANTO

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 2 = -2$$

$$\text{E } \lim_{x \rightarrow -2} e^x = e^{-2}$$

1) PARTICOLARMENTE SE f E' CONTINUA IN x_0

$\forall \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $a_n \in D_f$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0$ SI HA

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

UNA ALTRA APPLICAZIONE CI DICE CHE SE TROVIAMO 2
SUCCESSIONI $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = x_0 \quad \text{MA} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$$

ALLORA PER L'UNICITA' DEL LIMITE $\nexists$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad !!!$$

INFATTI SE $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ DOVREBBE

$$\text{ESSERE} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = l$$

ESEMPIO $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x) = ? \quad f(x) = \sin(x)$

PRENDIAMO $a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad b_n = 2\pi n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$$

$$f(a_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = 1$$

$$f(b_n) = \sin(2\pi n) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = 0$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad ? \quad f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

$$f(a_n) = \cos\left(\frac{1}{a_n}\right) = \cos(2n\pi) = 1 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = 1$$

$$f(b_n) = \cos\left(\frac{1}{b_n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

CALCOLO DEGLI INTERESSI

SIA y L'INTERESSE IN 1 ANNO, IL CAPITALE C
DOPO 1 ANNO DIVENTA $C(1+x)$

SE L'INTERESSE VIENE CALCOLATO SEMESTRALMENTE

DOPO IL PRIMO SEMESTRE IL CAPITALE DIVENTA

$$C' = C \left(1 + \frac{x}{2}\right) \text{ QUINDI DOPO IL SECONDO SEMESTRE}$$
$$\text{DIVENTA } C' \left(1 + \frac{x}{2}\right) = C \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$$

ORA SE DIVIDIAMO L'ANNO IN m PARTI

E SUPPONIAMO CHE L'INTERESSE ANNUALE SIA PAGATO
AD INTERVALLI DI $\frac{1}{m}$ (DI ANNO) ALLORA

SEGUENDO LO STESSO CALCOLO DI SOPRA DOPO 1 ANNO
IL CAPITALE DIVENTA $C \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ SE PENSANO DI

DIVIDERE L'ANNO IN PARTI SEMPRE PIÙ PICCOLE, "ANDIAMO
A L'INFINITO" $\lim_{m \rightarrow +\infty} C \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = C e^x$ (VEDI PAG. SEGUENTE)

ESISTENDO SE $x=1$, INTERESSI DEL 100% ANNUO

SE QUESTI VENGONO CALCOLATI ALLA FINE IL CAPITALE
DIVENTA $C(1+1) = 2C$, SE VENGONO CALCOLATI AD "OGNI"

ISTANTE" ALLORA DIVENTANO $C e^l = C e$

$l=2, 1, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} \stackrel{0/0}{=} 1 \quad \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e}{n}\right)^n = e^e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e}{n}\right)^{\frac{n}{e}} = e$$

W/FATTI

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e}{x}\right)^{\frac{x}{e}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e \quad y = \frac{x}{e}$$

$$e < 0 \quad y = \frac{x}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e}{x}\right)^{\frac{x}{e}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^{y \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)}$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} y \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1 \quad z = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e}{x}\right)^{\frac{x}{e}} = e \quad \forall e \neq 0$$

QUIA

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{e}{x}\right)^{\frac{x}{e}}\right]^e = e^e \quad \forall e \in \mathbb{R}$$

(e = 0 BANALE)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^n} \quad q_n = \frac{n!}{e^n}$$

$$q_{n+1} = \frac{(n+1)!}{e^{n+1}}$$

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{(n+1)!}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n!} = \frac{n+1}{e} > 2 \quad \forall n \geq 5$$

$$\Rightarrow q_6 > 2q_5, q_7 > 2q_6 > 2 \cdot 2 \cdot q_5 = 4q_5$$

$$q_{k+5} > 2^k \cdot q_5 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty \quad \text{CONFRONTO}$$

1. GENERALE DATA $\{q_n\} \subseteq \mathbb{R}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = l > 1 \Rightarrow$
 $\downarrow$
 $q_n > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$$

1. QUESTO MODO SI DIMOSTRA CHE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{c^n} = +\infty \quad \forall c > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n!} = ?$$

$$q_n = \frac{n^3}{n!} \quad q_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^3} \cdot (n+1) =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = e > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n!} = +\infty$$

m^n TERDE A $+\infty$ PIU' VELOC. DI m^1
 $m^1 \dots \dots \dots Q^n$
 $Q^m \dots \dots \dots m^k$ ($Q > 1$
 $\forall k > 0$)

SUCCESSIONI DEFINITE PER RICORRENZA

INVECE DI ASSEGNARE ESPLICITAMENTE Q_m

VIENE FORNITA UNA RELAZIONE TRA Q_{m+1} E

Q_m , OPPURE TRA Q_{m+1} , Q_m E Q_{m-1}

ES $Q_{m+1} = f(Q_m)$ f FUNZ. DATA

IN QUESTO CASO E' NECESSARIO ANCHE DARE ESPLICITAMENTE

IL VALORE INIZIALE Q_0 (OPPURE $Q_1, \dots$)

ALLORA LA SUCC. SARA' DEFINITA IN MODO IMPLICITO

$\forall m \geq 0$ ($m \geq 1, \dots$)

$$Q_{m+1} = Q_m + \frac{1}{Q_m}$$

$$Q_0 = 1 \rightarrow Q_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2, Q_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, Q_3 = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = \frac{29}{10}$$

$$\dots - Q_k = ?$$

$$\text{DOMANDA } \exists \lim_{m \rightarrow +\infty} Q_m = ?$$

OSSA $Q_m > 0$ SI PROVA PER INDUZIONE!

MI SERVE $Q_0 = 1 > 0$

OSS? q_n CRESCENTE!

$q_{n+1} > q_n$? OVVERO $q_{n+1} = q_n + \frac{1}{q_n} > q_n$?

SÌ PERCHÉ DALL'OSS.1 $q_n > 0 \quad \forall n$ quindi
 $\frac{1}{q_n} > 0$

OSS3 USANDO LA PROPOSIZIONE SULLE SUCCESSIVE

ABBIAMO CHE $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$!!

QUANTO VALE? $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & ? \\ +\infty & ? \end{cases}$

PUO' ESSERE $l \in \mathbb{R}$?

SE $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = l \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} q_{n+1} = l$

PER CUI USANDO $q_{n+1} = q_n + \frac{1}{q_n}$

E PASSANDO AL LIMITE OTTENIAMO

$l = l + \frac{1}{l}$ ASSURDO! $\frac{1}{l} = 0$ $1=0$

QUINDI $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$!!!

$$Q_{n+1} = f(Q_n, Q_{n-1})$$

IN QUESTO CASO E' NECESSARIO FORNIRE 2

VALORI INIZIALI, AD ESEMPIO $Q_0 = 0$, SE

VOGLIAMO VIDI DUALE $Q_n \forall n \geq 0$

IN QUESTO CASO LO STUDIO E' PIU' COMPLICATO

ES $Q_{n+1} = Q_n + Q_{n-1} \quad n \geq 1$

$$Q_0 = 1, Q_1 = 1$$

SUCCESSIONE DI FIBONACCI

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

CRESCITA DI UNA POPOLAZIONE DI CONIFER

OVVIAMENTE $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = +\infty$

LA COSA INTERESSANTE E'

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \bar{Q} \quad \bar{Q} \text{ SEZIONE AUREA} \quad \bar{Q} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

METODI PER LA RICERCA DEGLI ZERI

$$f(x) = 0$$

① f continua $f(a) < 0$ $f(b) > 0$ ($f(a) > 0$, $f(b) < 0$)

$\exists x_0 \in]a, b[$. $f(x_0) = 0 \rightarrow$ metodo di bisezione

② SIA $f \in C^1((a, b))$ FISSIAMO x_0

DEFINIAMO x_{n+1} IN FUNZIONE DI x_n NEL SEGUENTE MODO

CONSIDERIAMO LA RETTA TANGENTE PER $(x_n, f(x_n))$

$$x_n \quad y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

INTERSECHIAMO x_n CON L'ASSE DELL'X

$$\begin{cases} y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x - x_n = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \left(\text{SERVE } f'(x) \neq 0 \text{ PER ESSERE} \right. \\ \left. \text{SICURI CHE } x_n \text{ SIA} \right. \\ \left. \text{DIFFINITO } \forall n \right)$$

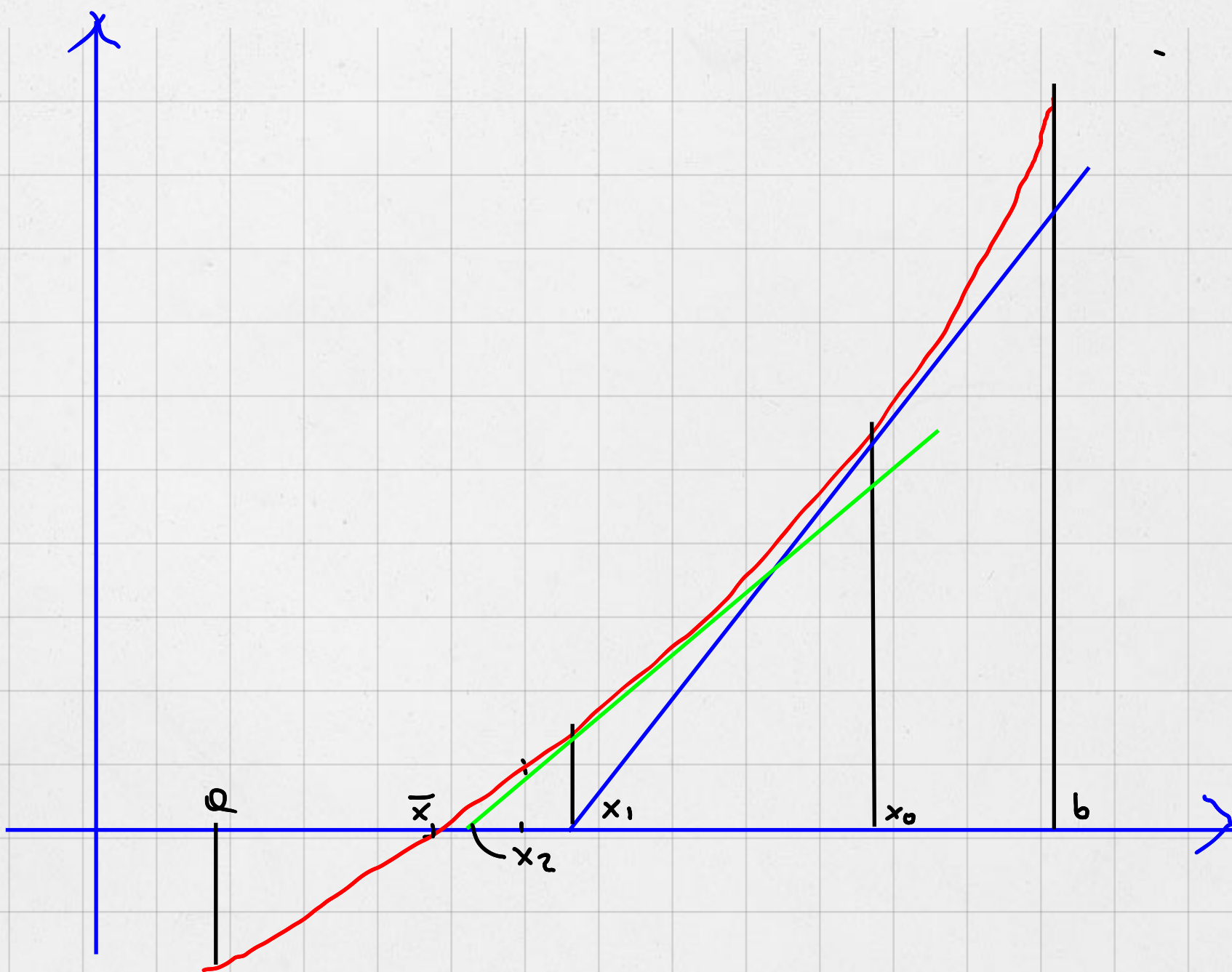
SE f E' MONOTONA E CONVESSA (o CONCAVA)

SUPPONIAMO CHE $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ PER CUI

SAPPIAMO CHE $\exists \bar{x} \in]a, b[$. $f(\bar{x}) = 0$

INOLTRE DALLA MONOTONIA SAPPIAMO CHE $\bar{x}$ E'

UNICO



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{SE LA SUCC. E' BEN DEFINITA}$$

$$\text{ED } \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l \in \mathbb{R} \quad \text{C' A SPETTIAMO}$$

$$l = l - \frac{f(l)}{f'(l)} \quad \text{DA CUI } f(l) = 0 !$$

IN QUESTO CASO f CONVESSA E CRESCENTE

OSS! SE $x_0 > \bar{x}$ $x_1 > \bar{x}$ E $x_1 < x_0$ I/FATTI

f CONVESSA $\Rightarrow f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ DA CUI PER $x = x_1$

$$f(x_1) > f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \Rightarrow f(x_1) > 0 \Rightarrow x_1 > \bar{x}$$

INOLTRE $f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \Rightarrow$ DA $f'(x_0) > 0$

CHÉ $f'(x_0)(x_1 - x_0) < 0$ QUINDI ESSENDO $f'(x_0) > 0$

SI HA $x_1 - x_0 < 0$ DA CUI $x_1 < x_0$

RIPETENDO LO STESSO RAGIONAMENTO AD OGNI

PASSO OTTIENIAMO

i) $f(x_m) > 0$ DA CUI $x_m > \bar{x}$

ii) $x_m < x_{m-1}$

OSSZ x_m È UNA SUCCESSIONE MONOTONA DECRE.

$\Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow +\infty} x_m$ TALE LIMITE È NECESSARIAMENTE

FINITO E QUANTO $x_m > \bar{x} \quad \forall m$

SE INDICIAMO CON l TALE LIMITE OTTIENIAMO

$$l = l - \frac{f(l)}{f'(l)} \Rightarrow f(l) = 0 \Rightarrow l = \bar{x} \quad \text{DA CUI}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m = \bar{x}$$

LO STESSO DISCORSO VALE SE $x_0 < \bar{x}$

IN TAL CASO AD OGNI PASSO SI HA $\forall m \geq 1$ (!)

i) $x_m > \bar{x}$

ii) $x_{m+1} < x_m \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} x_m = \bar{x}$

È POSSIBILE STUDIARE LA VELOCITÀ DI CONVERG. DI QUESTE SUCC. AL PUNTO $\bar{x}$!

DIMOSTRAZIONI SIMILI SI FANNO SE

f CRIS. E f CONCAVA

f DECR. E f CONVESSA

f DECR. E f CONCAVA

SERIE NUMERICHE $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ SUCCESSIONE

$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \rightarrow$ "SOMMA" DI INFINITI TERMINI

$\sum_{n=0}^5 Q_n$ SIMBOLO DI SOMMATORIA

$\downarrow$ IN QUESTO CASO HA SENSO

$$Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$$

MENTRE NON HA SENSO SOMMARE INFINITI TERMINI

ANZI SI CONSIDERA LA SEGUENTE

DEFINIZIONE DATA $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n$ E' UGUALE, SE ESISTE, AL LIMITE PER

$k \rightarrow +\infty$ DI $S_k = \sum_{n=0}^k Q_n \rightarrow$ SOMME PARZIALI

ANZI

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k$$

$\uparrow$ SE $\exists$

SE $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = l \in \mathbb{R}$ LA SERIE SI DICE

CONVERGENTE

SE $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = +\infty$ o $-\infty$ LA SERIE SI

DICE DIVERGENTE

SE $\nexists \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k$ LA SERIE SI DICE IRREGOLARE

ESEMPIO DATO $b \in \mathbb{R}$ CONSIDERIAMO LA SUCCESSIONE

$Q_n = b^n$ E QUILIBRO LA SERIE

$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n = \sum_{n=0}^{\infty} b^n$ SERIE GEOMETRICA

SOMME PARZIALI $S_k = \underbrace{b^0}_{=1} + b^1 + b^2 + b^3 + \dots + b^k = \frac{b^{k+1} - 1}{b - 1} \quad b \neq 1$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{b^{k+1} - 1}{b - 1} = \begin{cases} +\infty & b > 1 \\ \frac{-1}{b-1} = \frac{1}{1-b} & -1 < b < 1 \\ \nexists & b \leq -1 \end{cases}$$

SE $b = 1$ $S_k = k+1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = +\infty$

CONVERGE A $\frac{1}{1-b}$ SE $b \in (-1, 1)$

DIVERGE A $+\infty$ SE $b \geq 1$

IRREGOLARE SE $b \leq -1$