

FUNZIONE

VARIABILE INDIPENDENTE x

VARIABILE DIPENDENTE y

$y = f(x)$ S' LEGGE y FUNZIONE
di x

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

AD OGNI ELEMENTO DI A È
ASSOCIATO! (UNICO) ELEMENTO
DI B

A È IL DOMINIO E B IL CODOMINIO

ESEMPIO $A = \{ \text{COMUNI ITALIANE} \}$

$B = \{ \text{NUMERO DI ABITANTI} \}$

NON NECESSARIAMENTE A e B

SONO INSIEMI NUMERICI

se $A \in \mathbb{R}$ $B \in \mathbb{R}$

f SI DICE FUNZIONE REALE
DI VARIABILE REALE

OVVERO AD UN NUMERO REALE x
ASSOCIAMO IN MODO UNICO UN
ALTRO NUMERO REALE y

AD ESEMPIO x POTREBBE
ESSERE UNA VARIABILE TEMPORALE
E $y = f(x)$ LA SUA POSIZIONE ALL'
ISTRANTE x (PENSA DO DI MUOVERSI
SU UNO SPAZIO UNIDIMENSIONALE
"RETTA")

$$y = x + 4$$

$$y = x^2 + 5x$$

$$y = \frac{x+2}{x-1}$$

SONNO ESEMPLI DI FUNZIONI REALI

UN ESSE OLTRE A DARE ESPlicitAMENTE
 y UN FUNZIONE DI x DOVREMMO
ANCHE DIRI IL SUO VALORE DOMINIO
SONNO DEFINITE

SPESSE INVECE (IN REALTA' IN MODO
 IMPROPRIO) SI FORNISCE SOLO LA
 RELAZIONE SENZA SPECIFICARE A
 IN TAL CASO SPESSE SI SOTTOLINEA
 CHE IL SUO DOMINIO E' DATO DA
 TUTTE LE X PER CUI LA RELAZIONE
 HA SENSO.

IN QUESTO CASO SI PARLA
 DI DOMINIO DI DEFINIZIONE D_f
 ED E' DA DETERMINARE

AD ESEMPIO $f(x) = x + 7$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_f = [0, \infty) =: \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

.

FUNZIONI POLINOMICI

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad f(x) = P_m(x)$$

FUNZIONI RAZIONALI

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_m(x)} \quad \text{RAPPORTO TRA POLINOMI}$$

BISOGNA TROVARE L'INSIEME

DI DATO DAGLI ZERI DI Q_m

$$\text{IN TAL CASO } D_f = \mathbb{R} \setminus Z$$

$$f(x) = \sqrt{P_m(x)} \quad ?$$

BISOGNA RISOLVERE $P_m(x) \geq 0$!

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad \longrightarrow \quad x^2 - 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 2$$

$$D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{x^2-4}{2-x} - \frac{1}{x-3} \quad ?$$

$$D_f = ? \quad \begin{array}{l} x-1 > 0 \\ 2-x \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{array} \quad \sqrt{x-1} \neq 0$$

$$x > 1 \quad x \neq 1 \quad x \neq 2 \quad x \neq 3$$

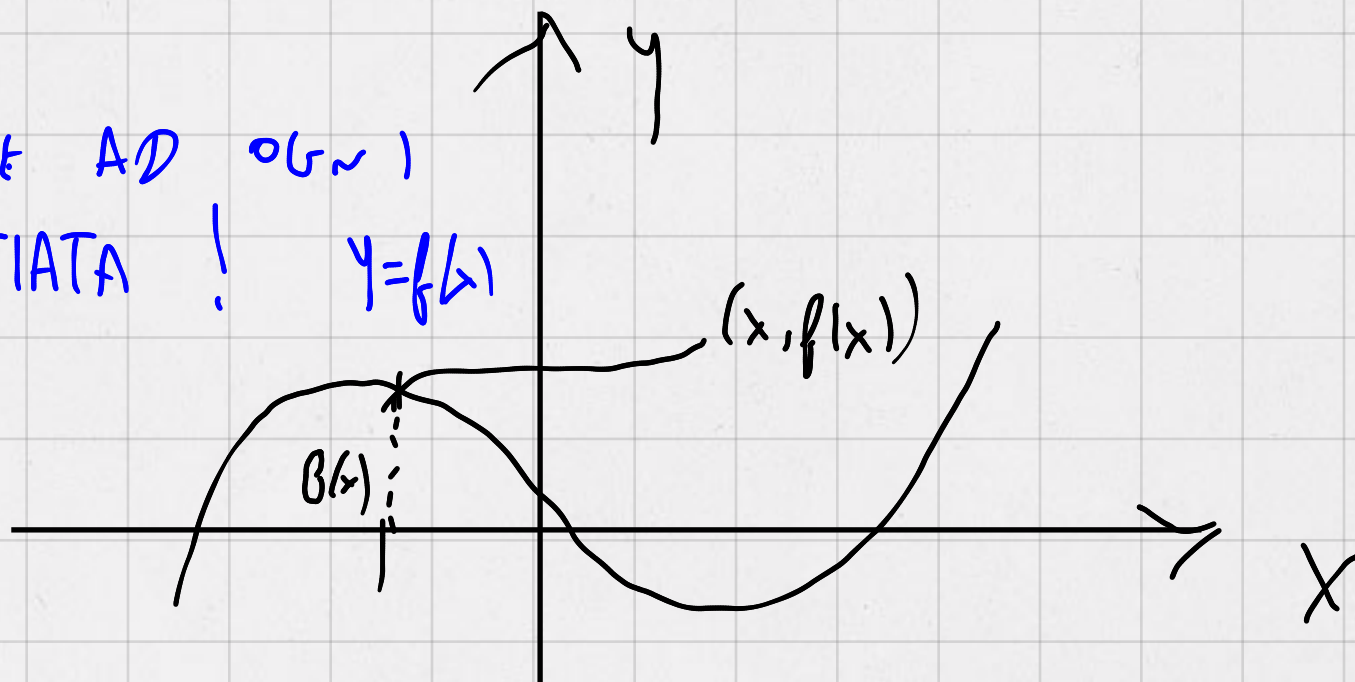
$$D_f = (1, \infty) \setminus \{2, 3\} = (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, \infty)$$

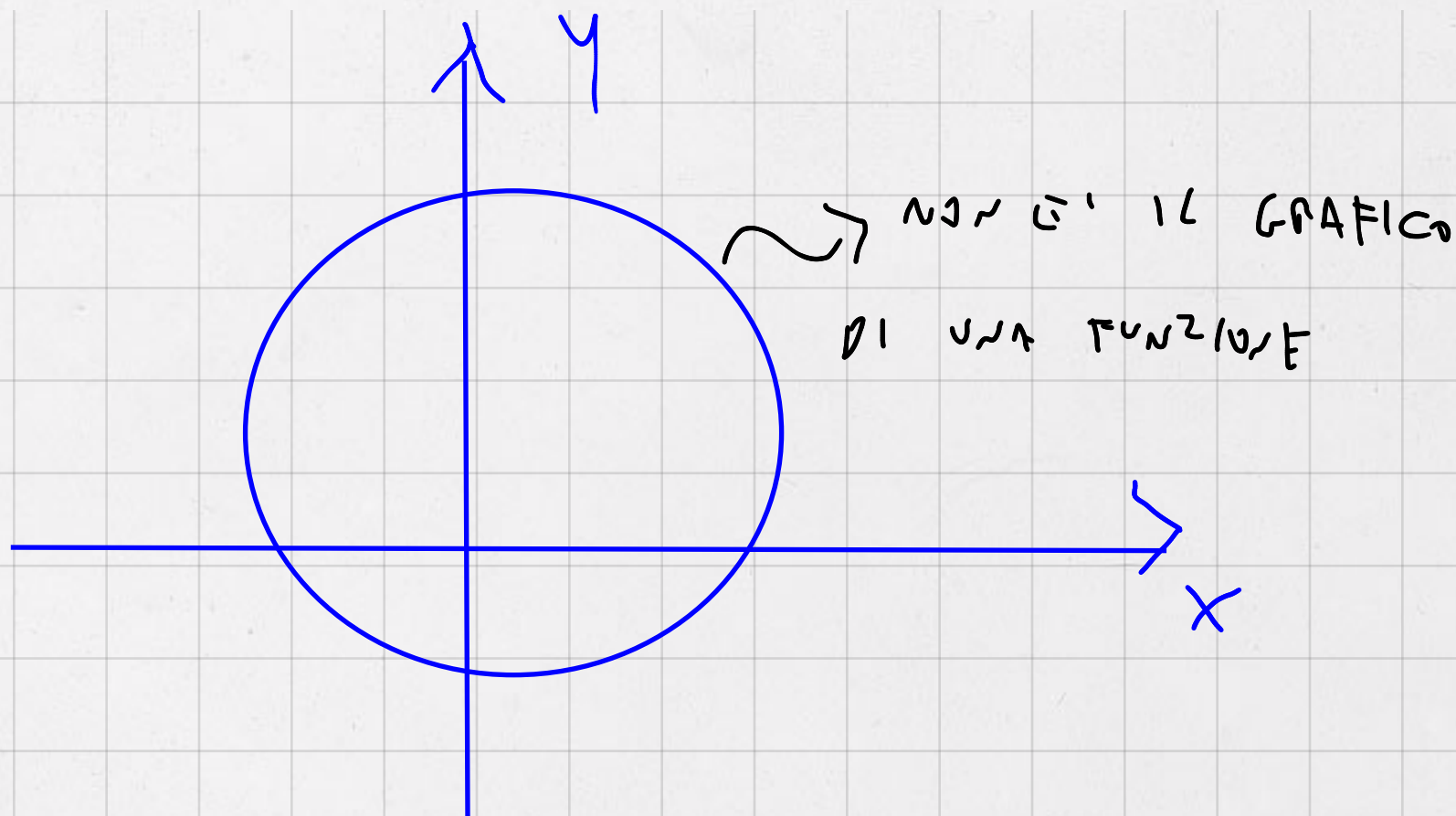
GRAFICO di f

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$G_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x) \}$$

IMPORTANTE AD OGNI
 x è ASSOCIATA! $y = f(x)$





$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

IMMAGINE DI f

"PUNTI RAGGIUNTI NEL CODOMINIO"

$$I_m f = f(A) = \{ y \in \mathbb{R} : \overset{\text{TALE CHE}}{\exists} x \in A \text{ PER CUI} \\ f(x) = y \}$$

IN GENERALE NON E' SEMPLICE
DA DETERMINARE

BISOGNA VEDERE PER QUALI y
L'EQ $f(x) = y$ HA ALMENO UNA SOLUZIONE
PER LA VARIABILE x

INOLTRE IN CERTI CASI SI PUO' ESSERE
 INTERESSATI ALL'IMMAGINE DI UNO SPECIFICO
 SOTTOINSIEME DEL DOMINIO $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $B \subset A$ POSSIAMO CERCARE $f(B)$

$$f(B) = \{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in B \text{ per cui } f(x) = y \}$$

$$f(x) = x^2 + 1 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$I_m f = f(D_f) ?$$

$$x^2 + 1 = y \rightarrow x^2 = y - 1 \stackrel{!}{\Rightarrow} y \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{CASO } x = \pm \sqrt{y-1} \quad 2 \text{ SOLUZIONI.}$$

$$I_m f = ?$$

$$[1, \infty)$$

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

SIA $B \subseteq \mathbb{R}$ DEFINIAMO

PREIMMAGINE DI B

$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) = y\}$$

IN QUESTO CASO DOBBIAMO ANCORA

STUDIARE L'EQ $f(x) = y$

E METTERE IN $f^{-1}(B)$ TUTTE LE x

CHE SONO SOLUZIONI DI UNA EQUAZIONE

$f(x) = y$ IN CUI $y \in B$

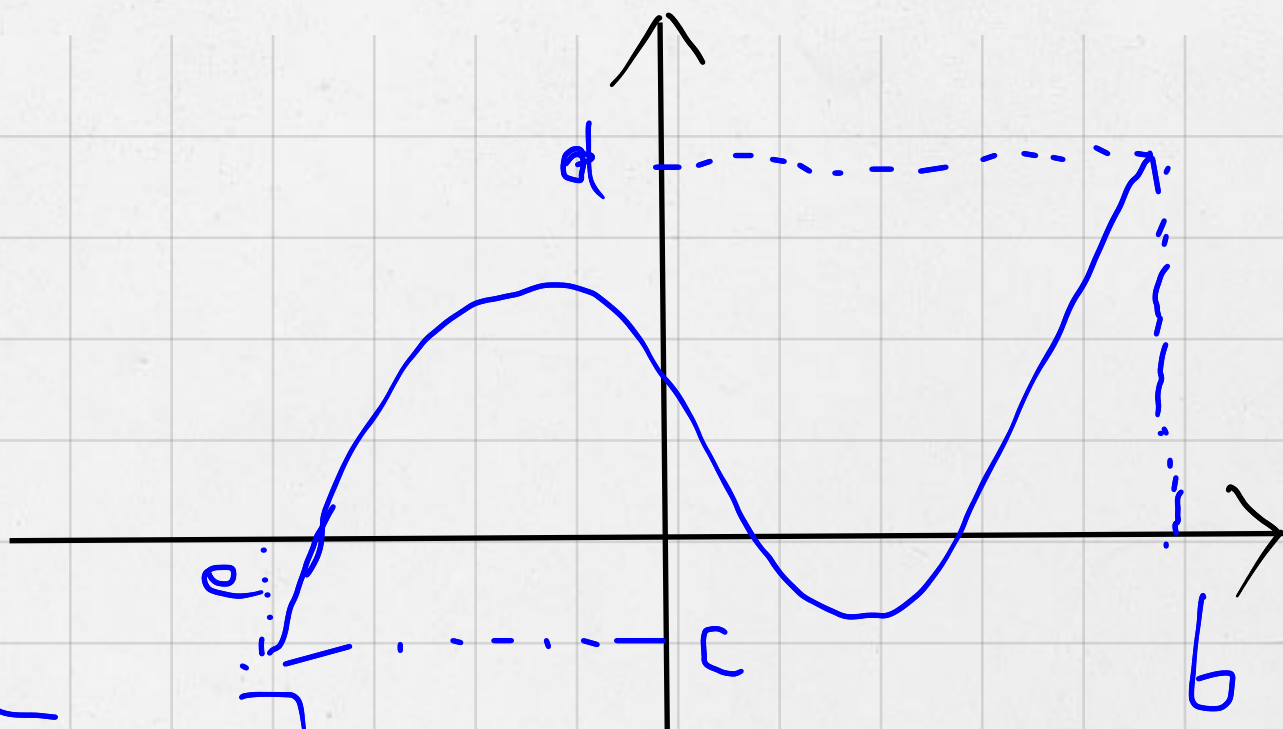
ESEMPIO A PRIMA $B = [4, \infty)$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$x^2 + 1 = y \quad (y \geq 4)$$

$$x = \pm \sqrt{y-1} \quad ??$$

$$f^{-1}(B) = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$$



$$A = [a, b]$$

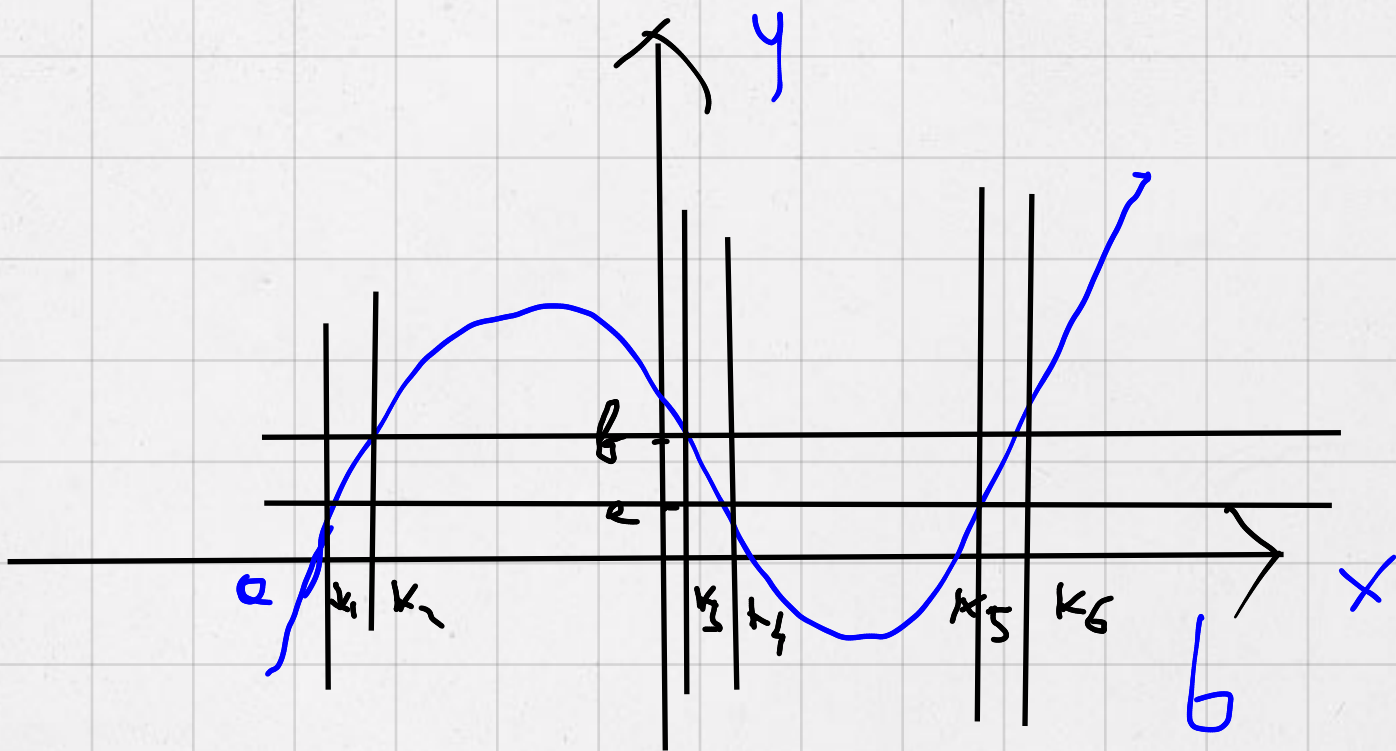
$$I_m f = [c, d]$$

GLI STRUMENTI DELL'ANALISI

CI PERMETTERANNO DI

EVITARE CALCOLI COMPLICATI

SPESSE 'IMPOSSIBILI' DA FARE



$$B = [a, b]$$

$$f^{-1}(B) = ?$$

$$f^{-1}(B) = [k_1, k_2] \cup [k_3, k_4] \cup [k_5, k_6]$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

è una funzione

se

$$\forall y \in \mathbb{R}$$

esiste al

meno

un

x

ta.

$$f(x) = y$$

in

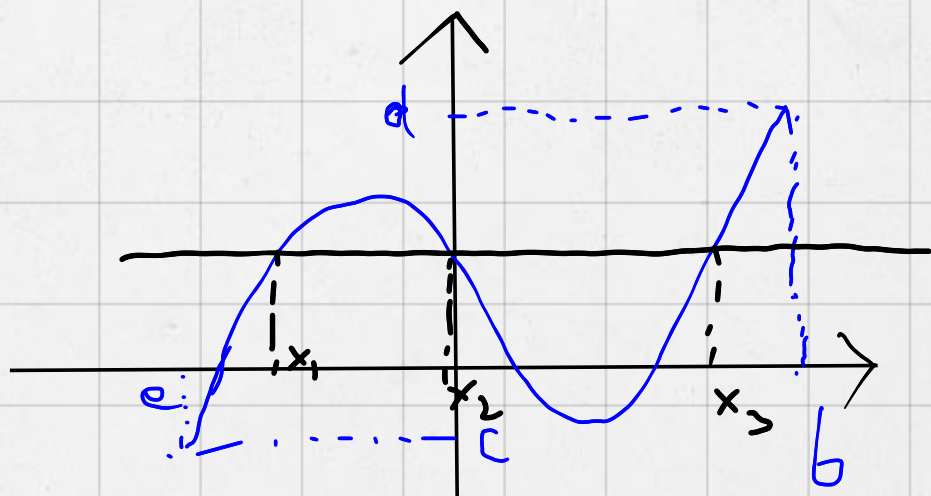
altre

parole

$\Leftrightarrow$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow$$

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$



NON E' INIETTIVA
 y_0

$$f(x) = y_0$$

HA 3 SOLUZIONI

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = y_0$$

LE FUNZIONI INIETTIVE SONO
 IMPORTANTI PERCHÉ PER ESSERE PUO'
 ESSERE DEFINITA LA FUNZIONE
 INVERSA $f^{-1}(y)$

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f \text{ INIETTIVA}$$

$$\text{Im } f = f(A) = B$$

$$f^{-1}: B \rightarrow \mathbb{R} \quad [\text{IN REALTA' GIA' SAPPIAMO DI ESISTERE IN } A]$$

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

IN PRATICA DOBBIAMO RISOLVERE ANCORA
 L'EQ $f(x) = y$ PER $\forall y \in B = f(A)$

NB. E' FONDAMENTALE CHE f
SIA INIETTIVA PER DEFINIRE f^{-1}

SE $f(x_1) = f(x_2) = y_0$ PER QUALCHE
 $y_0 \in f(A)$ NON POTRE' DEFINIRE

$f^{-1}(y_0)$ PERCHE' AVREI 2 VALORI

x_1 e x_2 IN CONTRASTO CON LA

DEFINIZIONE DI FUNZIONE

ES 1 $f(x) = x^3$ INIETTIVA $D_f = A = \mathbb{R}$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^3 \neq x_2^3 \quad f/\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \quad \text{E' L'INVERSA}$$

ES 2 $f(x) = x^2$ $A = D_f = \mathbb{R}$

NON E' INIETTIVA $f(-1) = f(1) = 1$

NON POSSO DEFINIRE L'INVERSA A

MEIO DI LIMITARE IL SUO DOMINIO

$A = [0, \infty) = \mathbb{R}^+$ $\longrightarrow$ IN QUESTI CASO

f DIVERSTA INIETTIVA INFATTI

SE $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ ALLORA
 $x_1^2 \neq x_2^2$

QUIVOCI $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

AMMETTE INVERSA

$$\boxed{f(x) = y}$$

$$x^2 = y \rightarrow y \geq 0$$

$$\text{Im } f = f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$$

$$f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{INVERSA IN } \mathbb{R}^+)$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad \text{IN QUESTO SENSO}$$

$$\sqrt{y} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{L'INVERSA DI } x^2$$

$$\text{ES } f(x) = \sqrt{x-1} \quad D_f = [1, \infty)$$

$$\text{INIETTIVA?} \quad \text{SI } x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1-1} \neq \sqrt{x_2-1}$$

$$\updownarrow$$
$$\boxed{x_1 - 1 \neq x_2 - 1}$$

$$\exists f^{-1} \subset \mathbb{H} \in f([1, \infty)) ?$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = y \quad \text{DEVE ESSERE } y \geq 0$$

$$\sqrt{x-1} = y \leadsto x-1 = y^2 \leadsto x = 1+y^2$$

$$\text{Auch } \forall y \geq 0 \quad \exists \text{ Lösung, NE} \Rightarrow \text{I}_n f = \mathbb{R}^+$$

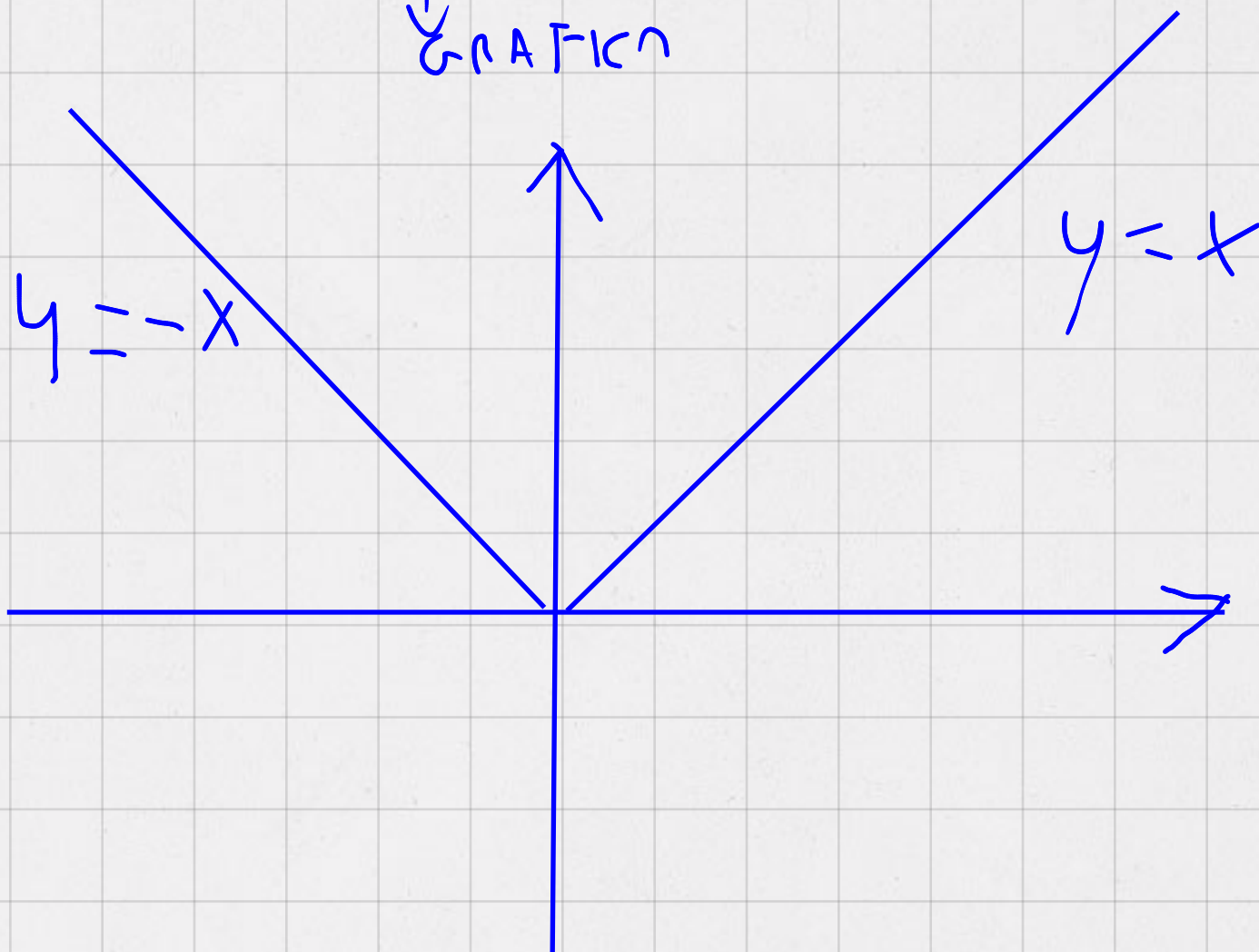
$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad ([1, \infty))$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{1+y^2}$$

FUNKTIONE MODUL

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

↓
GRAFIK



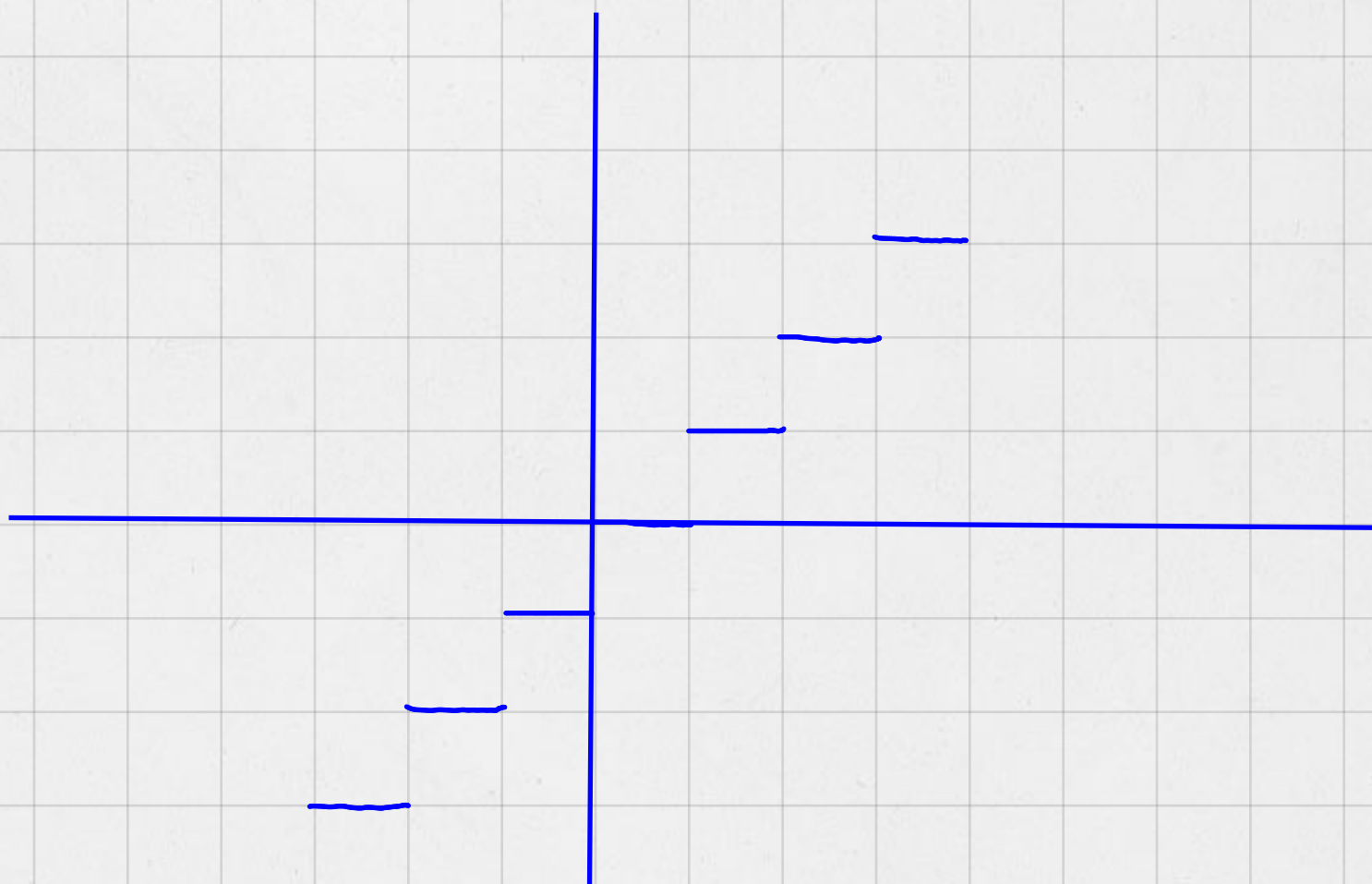
FUNZIONE PARTE INTERA

INTERO PIU' GRANDE $\leq x$ $[x]$

$[3] = 3$ $[3,74] = 3$ $[1,56] = 1$

$[-2,3] = -3$, $[-1] = -1$

OVVIAMENTE NON E' INIETTIVA



$[x]$ e ANCHE $\lfloor x \rfloor$

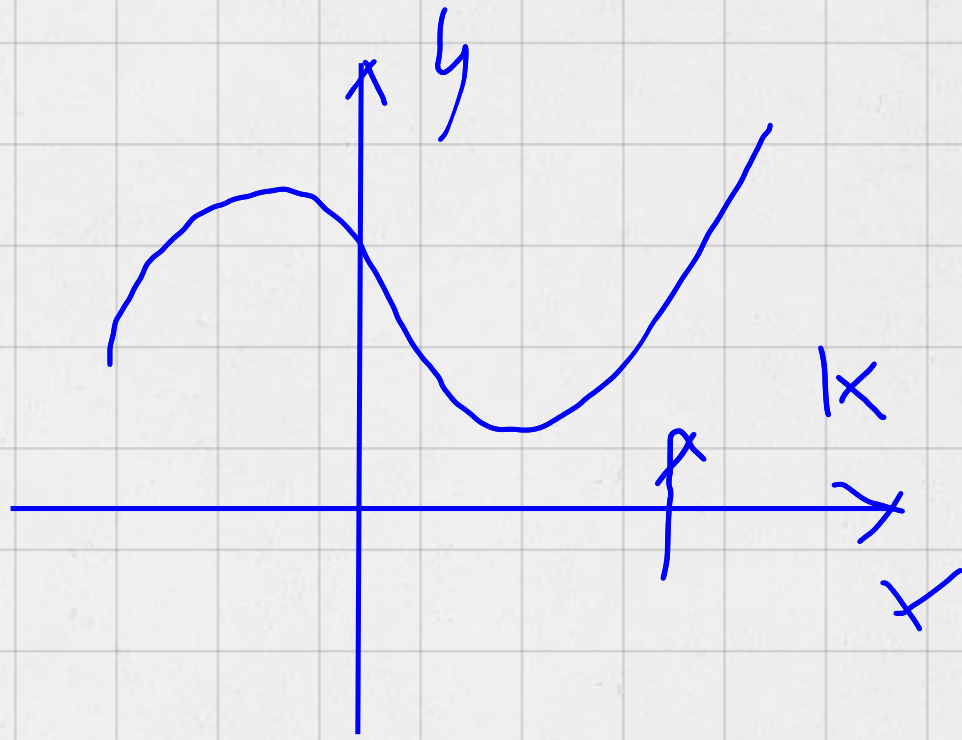
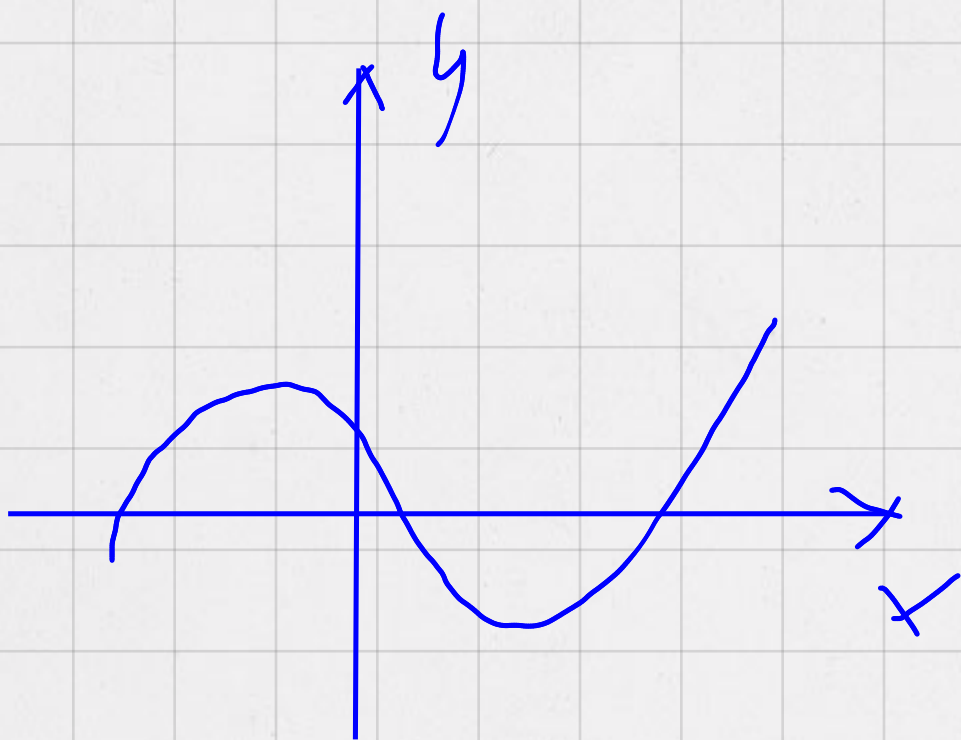
$\lfloor x \rfloor$ E' LA FUNZIONE INTERO PIU'
PICCOLO MAGGIORE O UGUALE AD x
PROVATE A DISEGNARE

DISEGNARE GRAFICI

PER ORA NE SAPPIAMO FARE
POCHI (QUELLI RELATIVI A LUOGHI
GEOMETRICI PARTICOLARI)

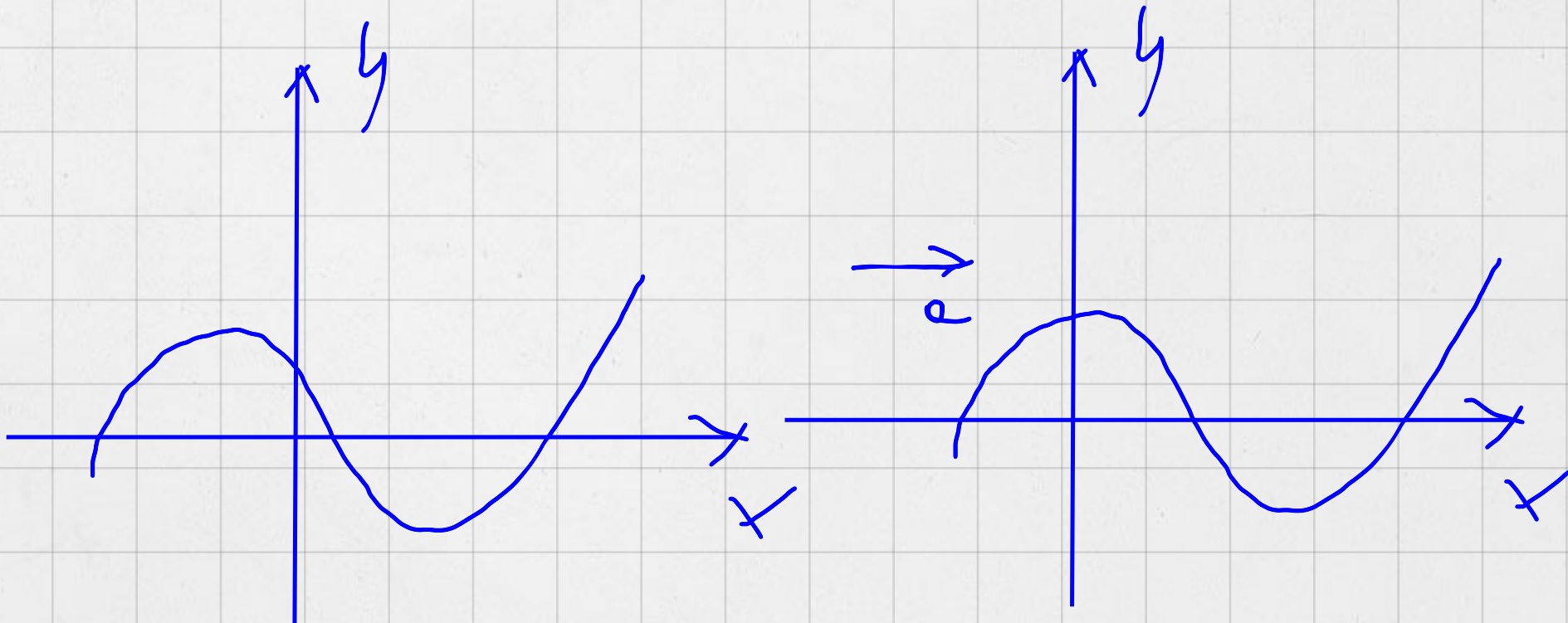
SE CONOSCO IL GRAFICO
DI $y = f(x)$
AVRO':

i) IL GRAFICO DI $y = f(x) + k$



TRASLAZIONE VERSO L'ALTO $k > 0$
VERSIL PASSO $k < 0$

$$(1) \quad y = f(x - a)$$



TRASLATAZIONE VERSO DESTRA $a > 0$

SINISTRA

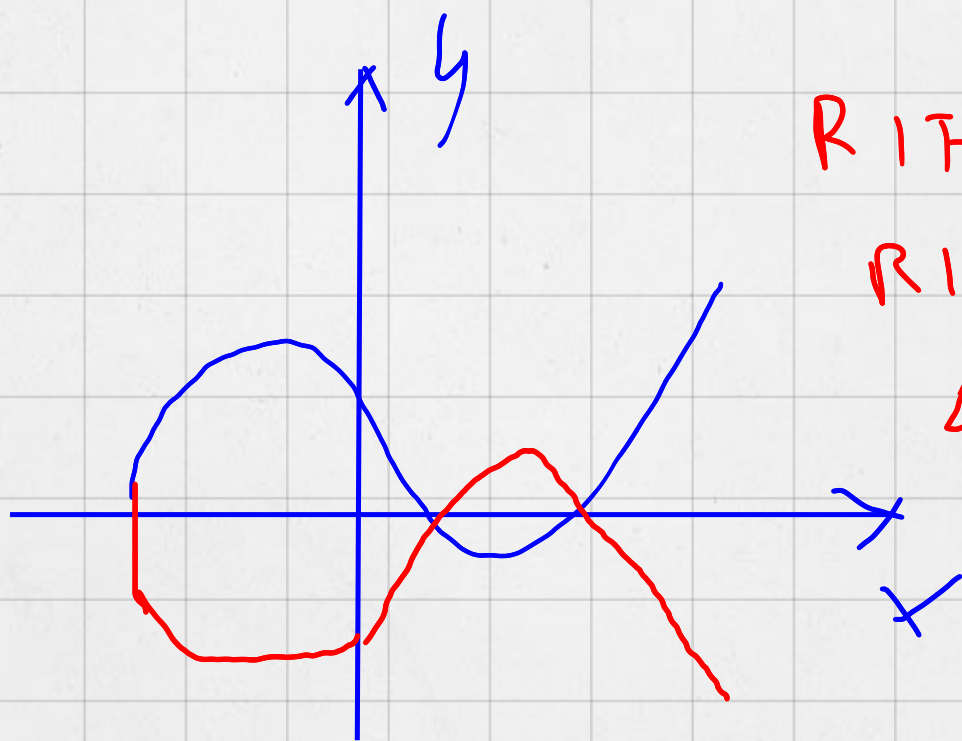
$a < 0$

di una quantità $|a|$

NB In questo caso anche

il dominio viene traslato

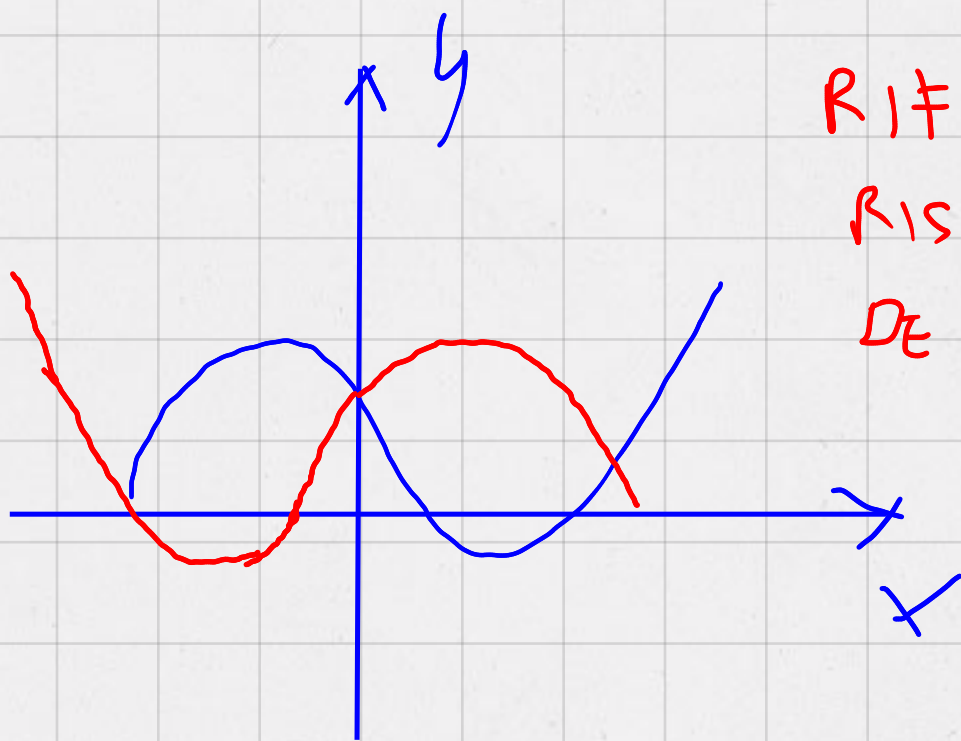
iii) $y = -f(x)$



RIFLESSIONE

RISPETTO ALL'ASSE
DELLE x

iv) $y = f(-x)$



RIFLESSIONE

RISPETTO ALL'ASSE
DELLE y

SE A È SIMMETRICO

OVVERO $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$

POSSIAMO CONSIDERARE SULLO

STESSO DOMINIO I VALORI

$f(x)$ e $f(-x)$

QUINDI SE $f(x) = f(-x)$

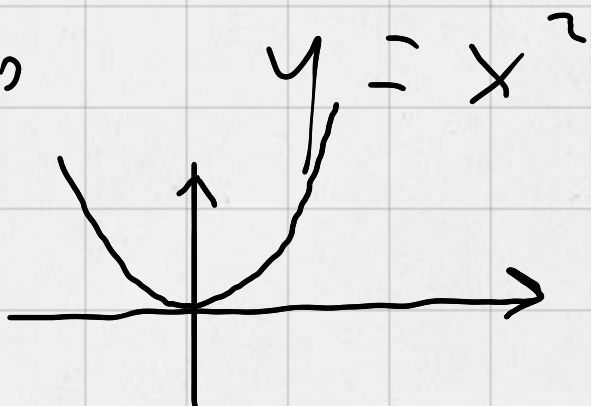
$\forall x \in A$ UNA FUNZIONE

SI DICE PARI IN TAL

CASO IL GRAFICO È

SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE
DELLE y .

ESEMPIO



PARABOLA

SE f È PARI BASTA FARF IL
GRAFICO PER LE $x > 0$ E AVANTO

IL GRAFICO PER LE $x < 0$ SI
OTTIENE PER SIMMETRIA

SE INVECE $\forall x \in A$

SI HA $f(x) = -f(-x)$

LA FUNZIONE SI DICE

DISPARI. IN QUESTO CASO

È SIMMETRICA RISPETTO

ALL'ORIGINE $(0,0)$

INTATTI $(x,y) \in G_f \Leftrightarrow$

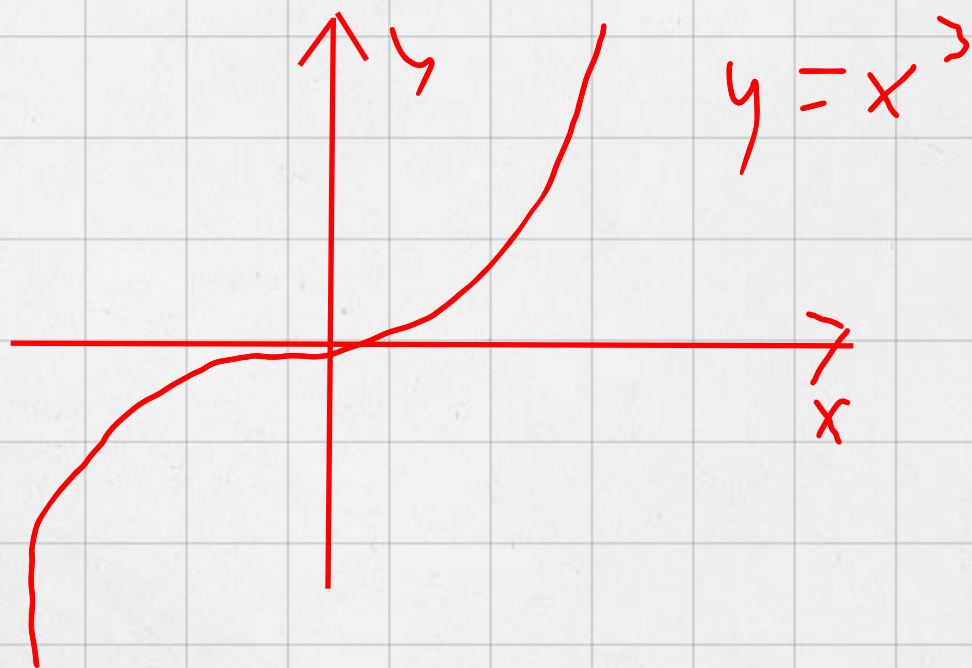
$(-x, -y) \in G_f$

IL GRAFICO PER LE $x < 0$

SI PUÒ ANCHE OTTENERE TRAMITE
UNA DOPPIA RIFLESSIONE

ESSEMPIO
E' DISPARI

$$f(x) = x^3$$



$f(x) = x^n$ $\begin{cases} \text{PARI} & \text{SE } n \text{ E' PARI} \\ \text{DISPARI} & \text{SE } n \text{ E' DISPARI} \end{cases}$

ES $f(x) = |x|$ PARI

$f(x) = x^3 + x$ DISPARI

$f(x) = x^3 + |x| + 1$ PARI

$f(x) = x^2 + x^3$ NON E' PARI NE DISPARI

DISSEGNALE $f(x) = |x-1| + 2$ $f(x) = -|x| + 1$

$f(x) = (x-1)^2 + 4$