

OPERAZIONI TRA FUNZIONI

se $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

SI POSSONO DEFINIRE SULL'INSIEME D,

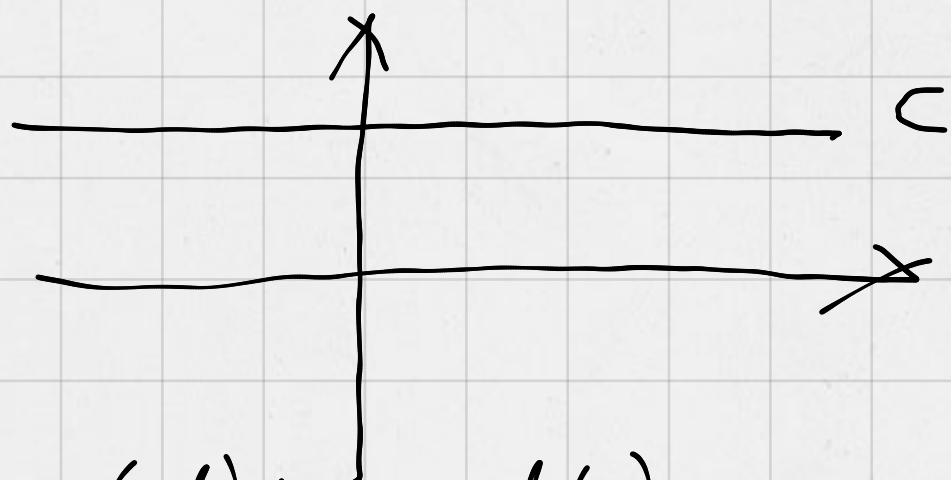
DEFINIZIONE COMUNE $A \cap B$

LE FUNZIONI $f+g, f \cdot g$

$$f+g: A \cap B \rightarrow \mathbb{R} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$f \cdot g: A \cap B \rightarrow \mathbb{R} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

OVVIAMENTE ANCHE $c \cdot f$ DOVE c E' UNA QUALSIASI COSTANTE FISSATA



FUNZIONE COSTANTE

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$$

E' ANCHE

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

POSSIAMO DEFINIRE ANCHE LA
LA FUNZIONE $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ A PATTO DI TAGLIARE

DALL' INSIERE $A \cap B$ IN CUI SONO DEFINITE
ENTRAME I PUNTI IN CUI SI ANNULLA $g(x)$

ES $f(x) = \sqrt{x-1}$ $g(x) = \sqrt{4-x^2}$

$\downarrow$

$A \rightarrow x \geq 1$ $B \rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$$A \cap B = [1, 2]$$

IN QUESTO POSSO DEFINIRE

$$(f+g)(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x^2} \quad \text{e} \quad (f \cdot g)(x) = \sqrt{x-1} \sqrt{4-x^2}$$

PER DEFINIRE $\frac{f}{g}$ DEVO ESCLUDERE $x=2$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{4-x^2}}$$

FUNZIONE RAZIONALE

$\frac{P_m(x)}{Q_m(x)}$ SE $m \geq n$ SI PUO' ESSERE LA "DIVISIONE"
 OVER: $\frac{P_m(x)}{Q_m(x)} = T_{n-m}(x) + \frac{R_{m-1}(x)}{Q_m(x)}$

T_{n-m} POLINOMIO DI GRADO AL PIU' $n-m$
 R_{m-1} POLINOMIO - - - - - $m-1$
 T_{n-m} QUOZIENTE, R_{m-1} RESTO

ES $\frac{x^3-1}{x-2}$ $D_f = R_1\{2\}$

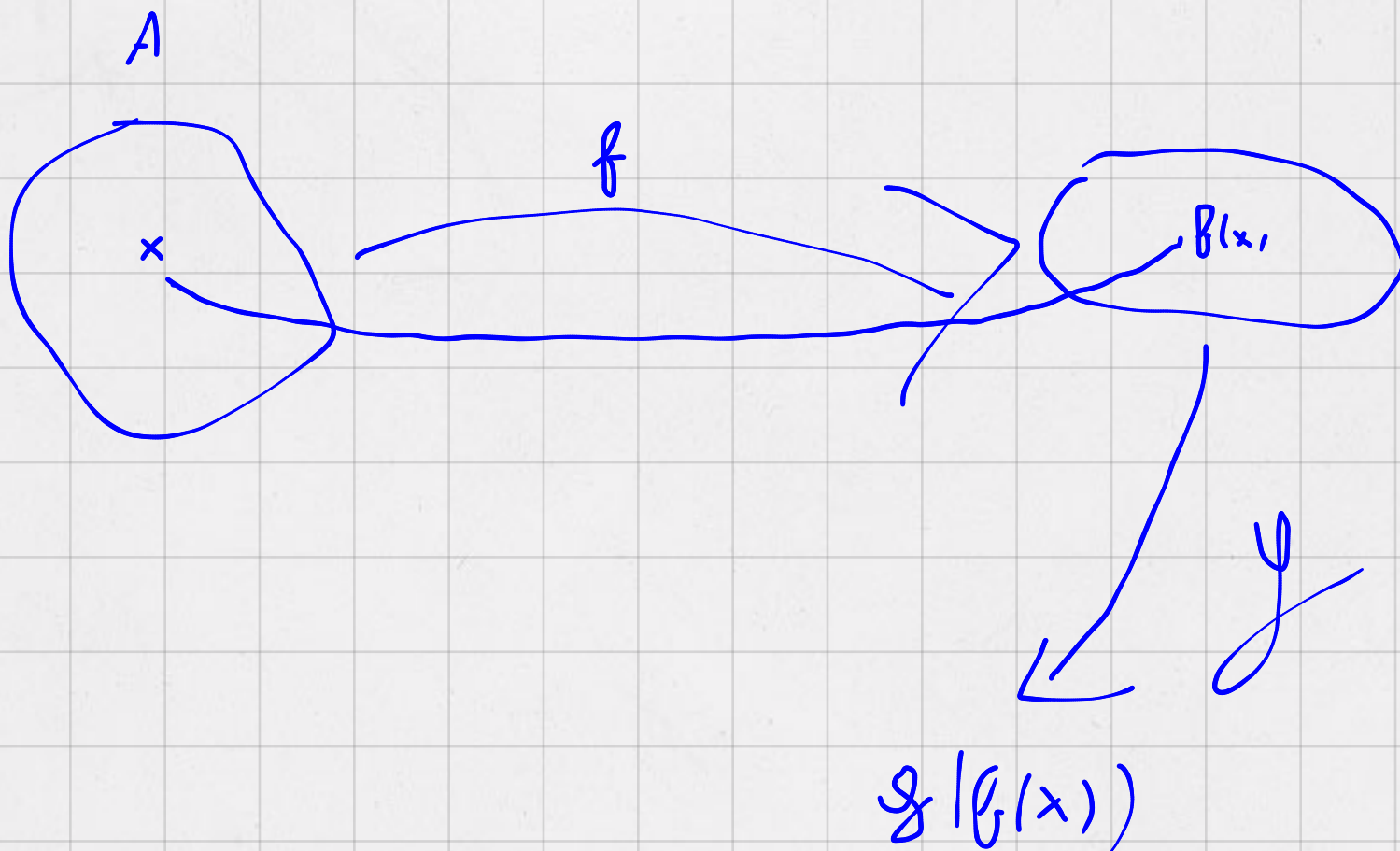
$$\begin{array}{r}
 x^3 - 1 \\
 -x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 2x^2 - 1 \\
 -2x^2 + 4x \\
 \hline
 4x - 1 \\
 -4x + 8 \\
 \hline
 7
 \end{array}$$

$$\frac{x^3-1}{x-2} = x^2 + 2x + 4 + \frac{7}{x-2}$$

FUNZIONI COMPOSITE

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

VOGLIAMO DEFINIRE LA FUNZIONE
COMPOSTA $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



PER FARE CIO' A PRIMO BISOGNO CHE
 $f(x)$ SIA NEL DOMINIO DI g

$$\text{OVVERO } \text{Im}f = f(A) \subseteq B$$

$$g \circ f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

UN BUON MODO PER SCRIVERE LA COMPOSIZIONE
 $g(y) = \dots$ $f(x) = \dots$ E POI AL POSTO DI y
 SI METTE $f(x)$

ESEMPIO $f(x) = \sqrt{x}$ $g(y) = y + 4$

IN TAL CASO $D_f = \mathbb{R}$ NON CI SONO

PROBLEMI $(g \circ f)(x) = \sqrt{x} + 4$

OSSERVIAMO CHE LA COSA SAREBBE DIVERSA

SE VOLESSIMO DEFINIRE $f \circ g$ INFATTI

$D_f = [0, \infty)$ mentre $\text{Im } g = g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

PER CUI $\text{Im } g \not\subseteq D_f$

SE VOGLIAMO DEFINIRE $f \circ g$ DOPPIAMO

LIMITARE IL DOMINIO DI g IN MODO

TALE DA FARE IN $[0, \infty)$ QUALCOSA

$x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$!!

CONV DIVERSTA SCETTA POSSIAMO DEFINIRE

$$f \circ g : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \circ g(x) = \sqrt{x+1}$$

OSSERVANDO I LIMITI CHE $f \circ g \neq g \circ f$

IN GENERALE

DETERMINARE $g \circ f(x)$

$$f(x) = x-6 \quad g(y) = y^2+1$$

$$f(x) = |x| \quad g(y) = \sqrt{y}$$

$$f(x) = x^2-1 \quad g(y) = \frac{1}{y^2+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad g(y) = \frac{1}{y}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \quad g(y) = y^2$$

DETT. A UN MOMENTO CHE SIA

BEV DEFINITA $g \circ f$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}, \text{ SCRIVERE } g \circ f$$

GRECCA COSA PER $f \circ g$!

FUNZIONI MONOTONE

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ SI DICE MONOTONA
CRESCENTE (NON DECRESCENTE)
(DECRESCENTE) (NON CRESCENTE)

SE $\forall x_1, x_2 \in A$ $x_1 < x_2$

$f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$)

($f(x_1) > f(x_2)$) ($f(x_1) \geq f(x_2)$)

LA DEFINIZIONE HA SENSO IN
QUANTO C'È UNA RELAZIONE DI
ORDINE NEI DOMINIO E NEL
CODOMINIO

QUINDI LE FUNZIONI MONOTONE

SONO QUELLE IN CUI UN "ORDINE"
PASSA DAL DOMINIO ALL'IMMAGINE

NB SE f E' CRESCENTE
O DECRESCENTE ALLORA E'
AUTOMATICAMENTE INIETTIVA

ES $f(x) = x^3$ SU $\mathbb{R}$ E'
CRESCENTE

$f(x) = x^2$ SU $\mathbb{R}$ NON E'

CRESCENTE, MENTRE SU

$[0, \infty)$ E' CRESCENTE

$f(x) = \frac{1}{x}$ E' DECRESCENTE SU $[0, \infty)$

MENTRE NON LO E' IN $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = x^3 + x$ E' CRESCENTE?

SI IN GENERALE SOMME DI FUNZ. CRESC.
SONO CRESCENTI

[x] PARTE ULTERA E' NON DECRESC.

FUNZIONI PERIODICHE

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se $\exists T > 0 \cdot \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x+T) = f(x)$ ALLORA f SI CHIAMA PERIODICA

DI PERIODO T . IN GENERALE DATA
UNA FUNZ. PERIODICA PUO' ESSERE INTERESSANTE

TROVARE IL VALORE PIU' PICCOLO PER IL
QUALE LA FUNZ. RISULTA PERIODICA

ESEMPIO $f(x) = k$ COSTANTE E' SEMPRE
PERIODICA DI QUALSIASI PERIODO

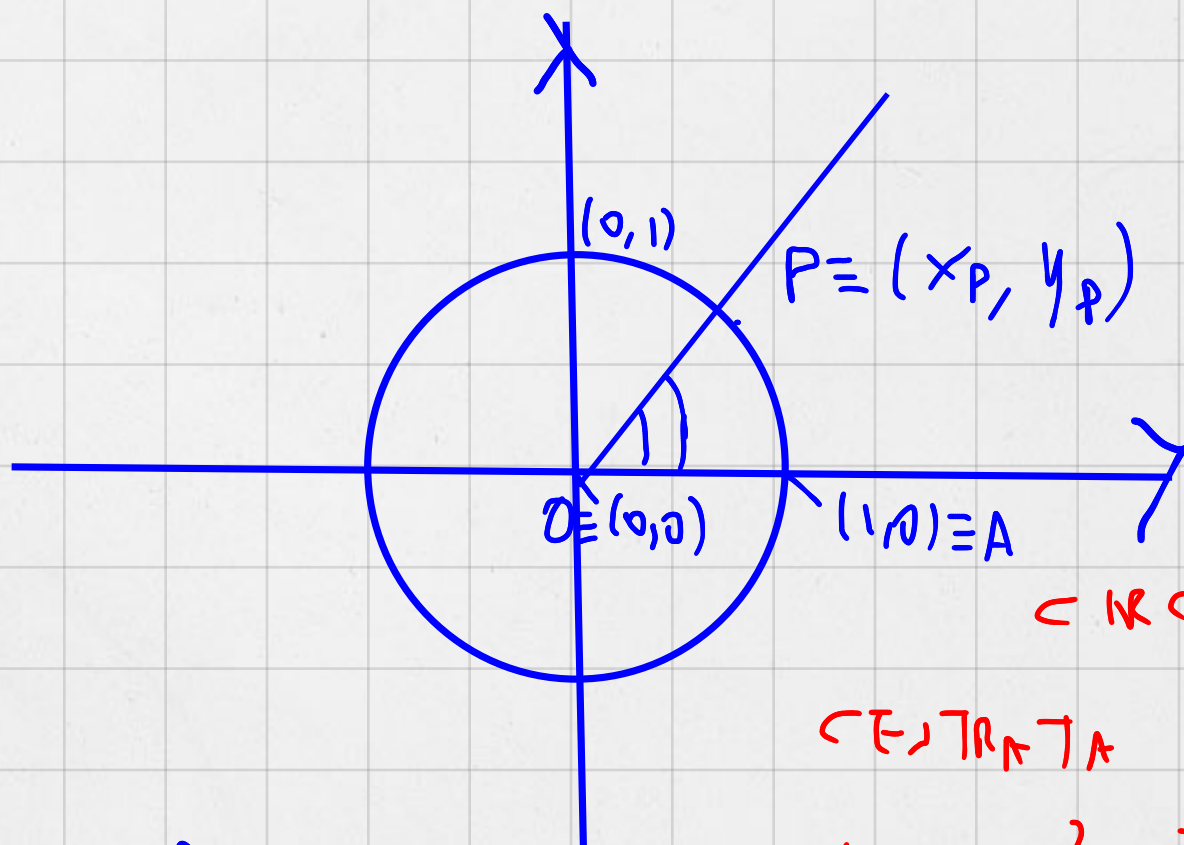
ESEMPIO $f(x) = x - [x]$ E' PERIODICA
DI PERIODO 1 (E' ANCHE IL VALORE PIU'
PICCOLO). INFATTI

$$f(x+1) = x+1 - [x+1] = x+1 - [x] - 1 = x - [x]$$

$$[y+1] = [y] + 1 \quad \text{PRIMA DI DIMOSTRARE } f(x)$$

IMPORTANTE CLASSE DI FUNZ. PERIODICHE

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



CIRC. DI RAGGIO 1

CENTRATA IN $O \equiv (0,0)$

$$Eq \quad x^2 + y^2 = 1$$

Angolo $\widehat{AOP}$ si misura

in GRADI oppure in RADIANTI ovvero

lunghezza della parte di circonferenza

sottesa dall'angolo. Sapendo che

l'angolo giro 360° corrisponde alla

lunghezza di tutta la circonf. 2π

tramite una proporzione possiamo

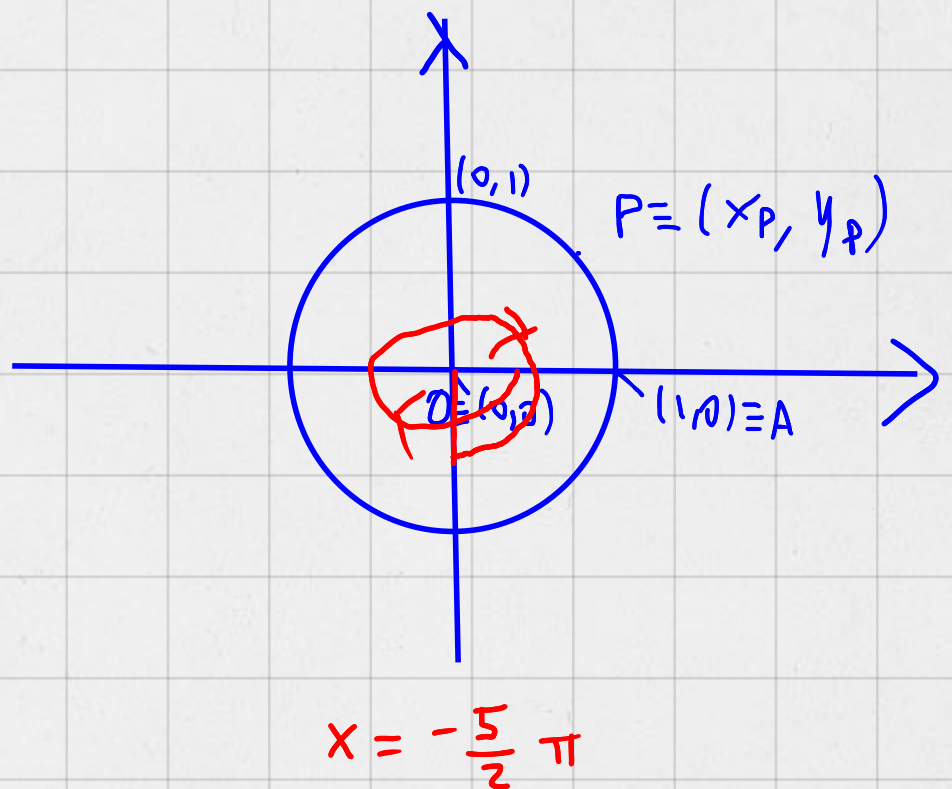
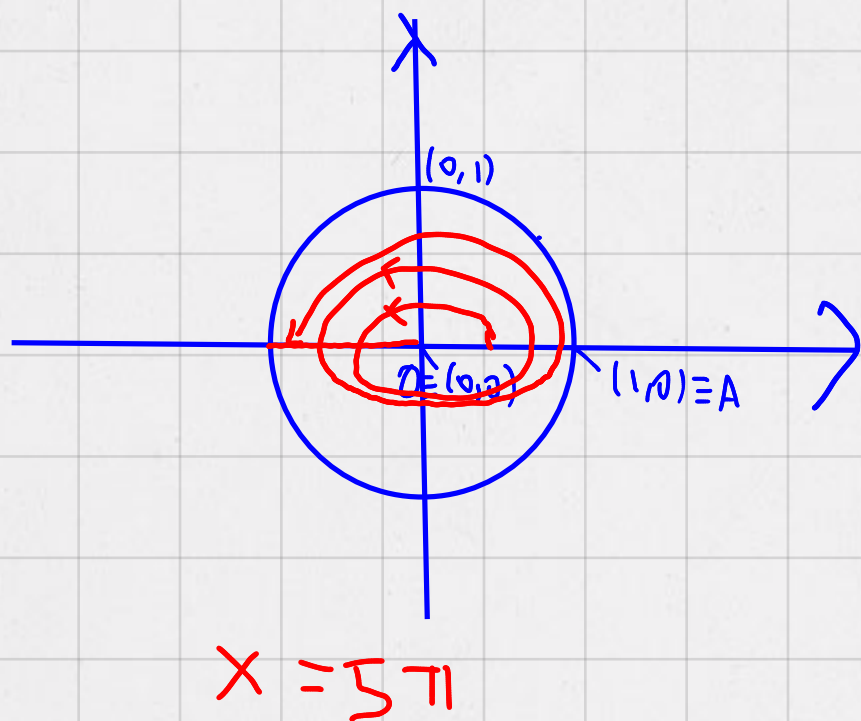
passare da uno all'altro

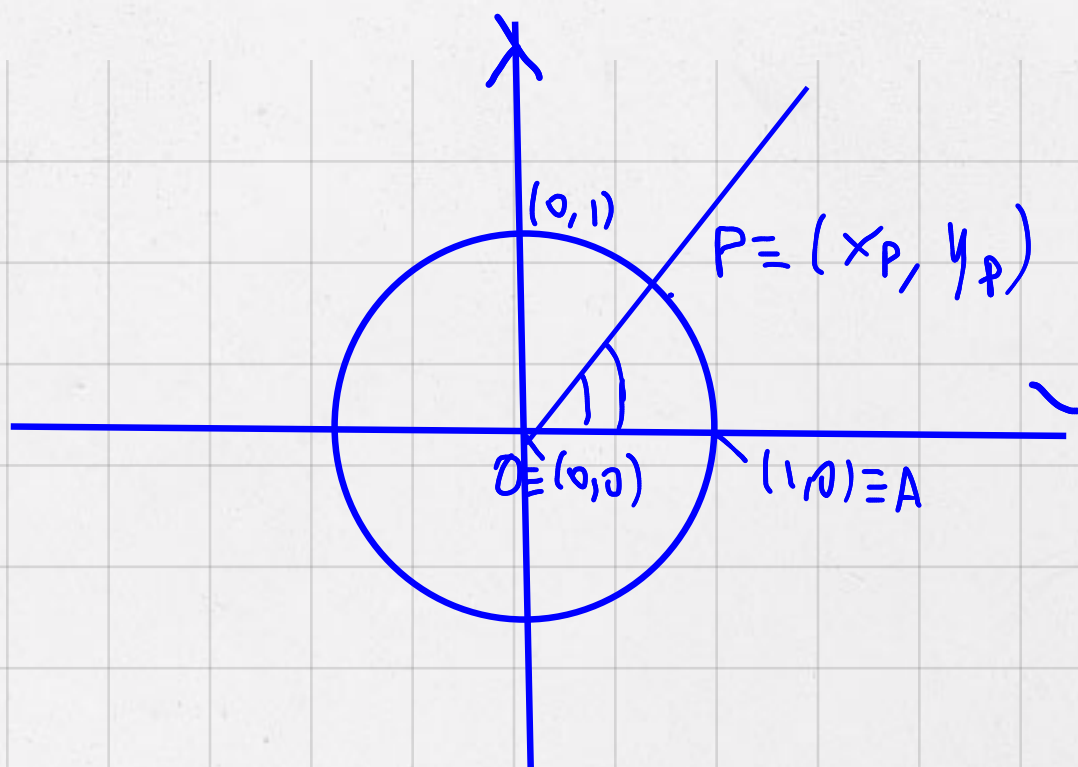
$$\overset{\text{RADIANI}}{x} : \overset{\text{GRADI}}{x_0} = 2\pi : 360 = \pi : 180$$

POSSIAMO PENSARE DI MISURARE TRAMITE
 RADANTI ANGOLO OLTRE L'ANGOLO GIRO. BASTA CONTARE
 GIRI FATTI IN SENSO ANTIOARIO
 NELO STESSO MODO CONSIDERIAMO
 ANGOLO OTTENUTI FACENDO GIRI IN SENSO
 OARIO USANDO RADANTI NEGATIVI

$x = 5\pi$ CORRISPONDE A 2 GIRI IN SENSO
 ANTIOARIO + MEZZO GIRO

$x = -\frac{5}{2}\pi = -2\pi - \frac{\pi}{2}$ CORRISPONDE A 1 GIRO IN SENSO
 OARIO + UN'ULTERIORE QUARTO





A QUESTO PUNTO $\forall x \in \mathbb{R}$ DETERMINIAMO UN PUNTO
 $P \equiv (x_p, y_p)$ SULLA CIRCONFERENZA UNITARIA DI CENTRO
 $O \equiv (0,0)$

DEFINIAMO: $f(x) = \sin(x) = y_p$ e $g(x) = \cos(x) = x_p$

QUESTE SONO DEFINITE $\forall x \in \mathbb{R}$ E PER DEFINIZIONE

AVEREMO $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ E $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$

SONO QUINDI PERIODICHE DI PERIODO $T=2\pi$

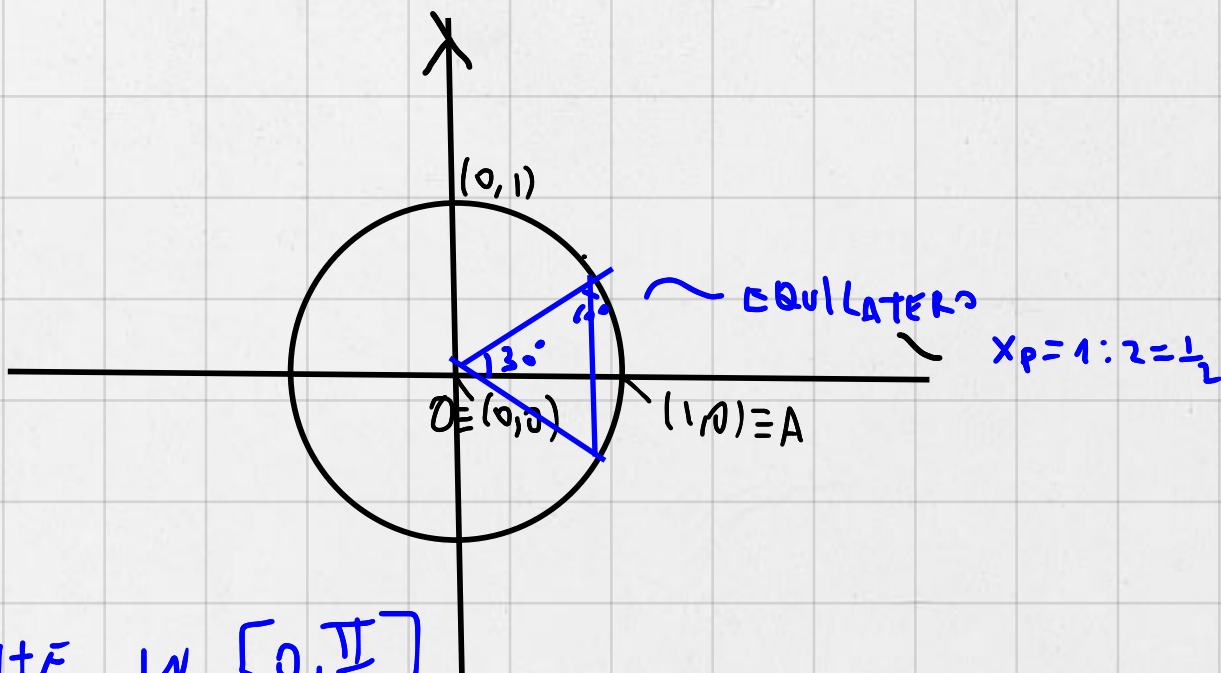
INOLTRE $\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1} \rightarrow -1 \leq \cos(x) \leq 1$ E

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\sin(0) = 0 \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \sin(\pi) = 0 \quad \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 \quad \sin(2\pi) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \text{GEOMETRIA}$$

$$\frac{\pi}{6} \sim 30^\circ$$



OSSERVIAMO CHE IN $[0, \frac{\pi}{2}]$

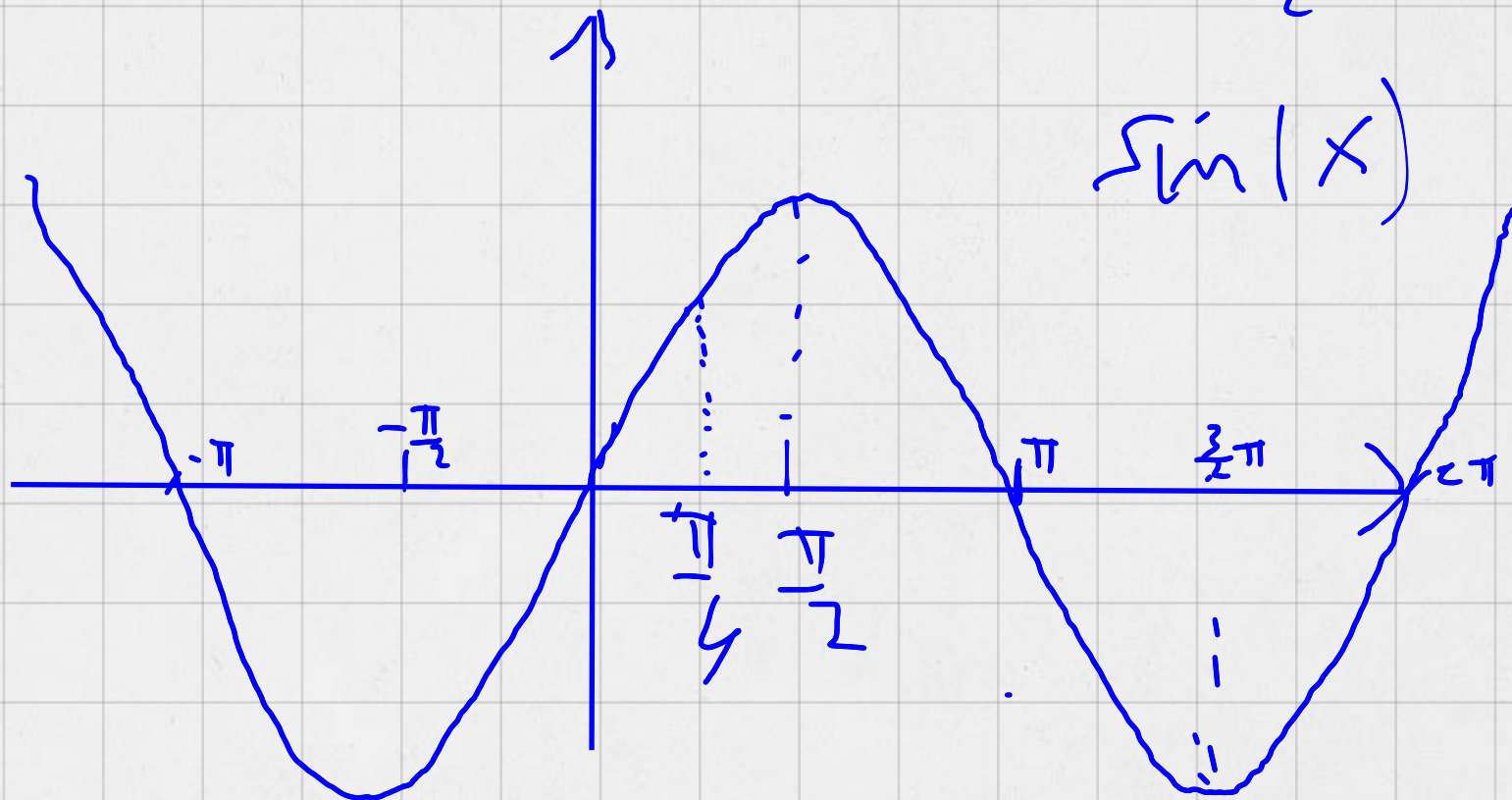
$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ ESSENDO ENTRAMBI POSITIVI

INOLTRE $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ MA ANCHE

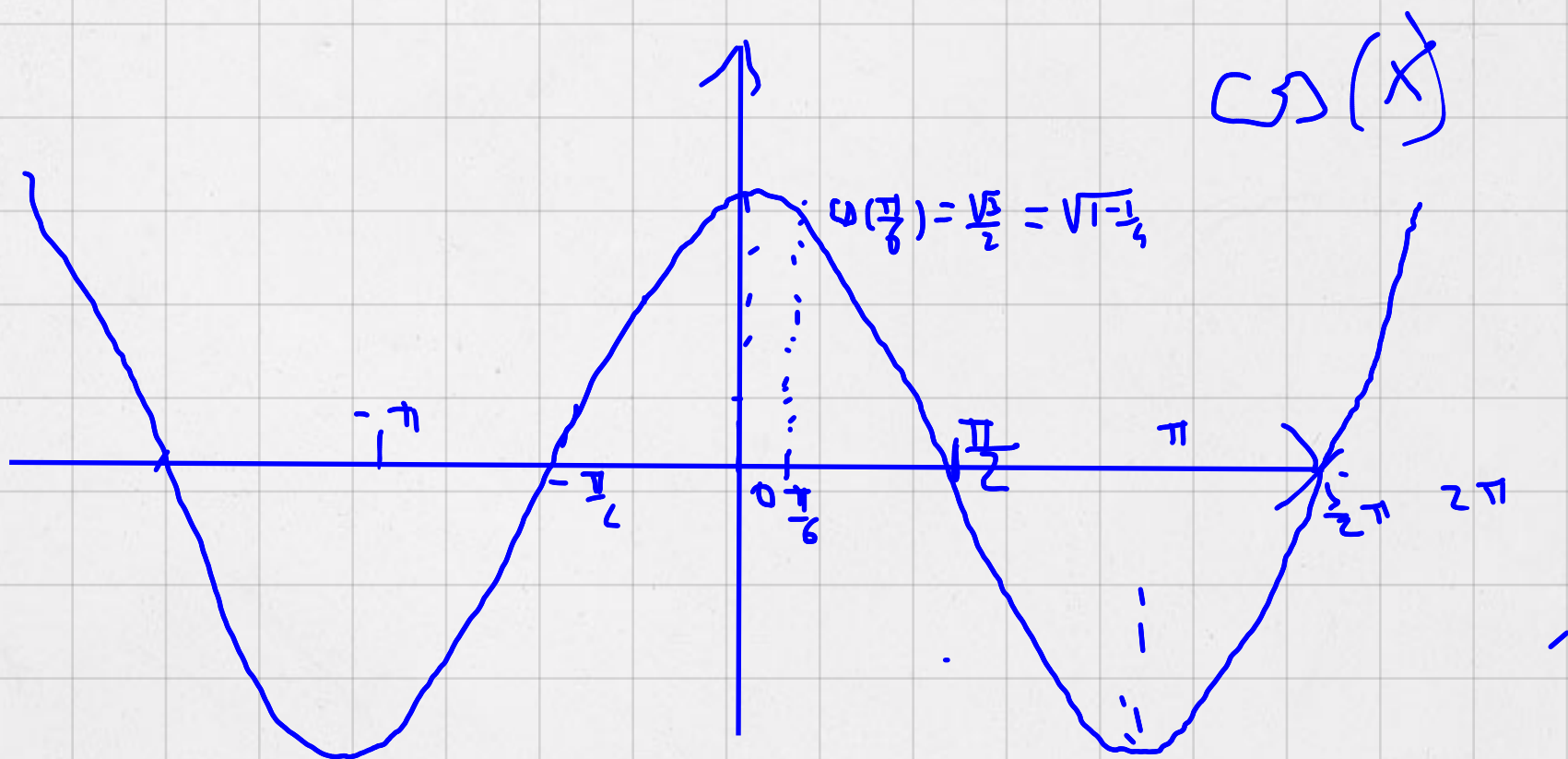
$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ ESSENDO $\cos(x) = \cos(-x) \forall x$
 $\downarrow$ FUNZ. PARI

MENTRE $\sin(-x) = -\sin(x)$ E' DISPARI

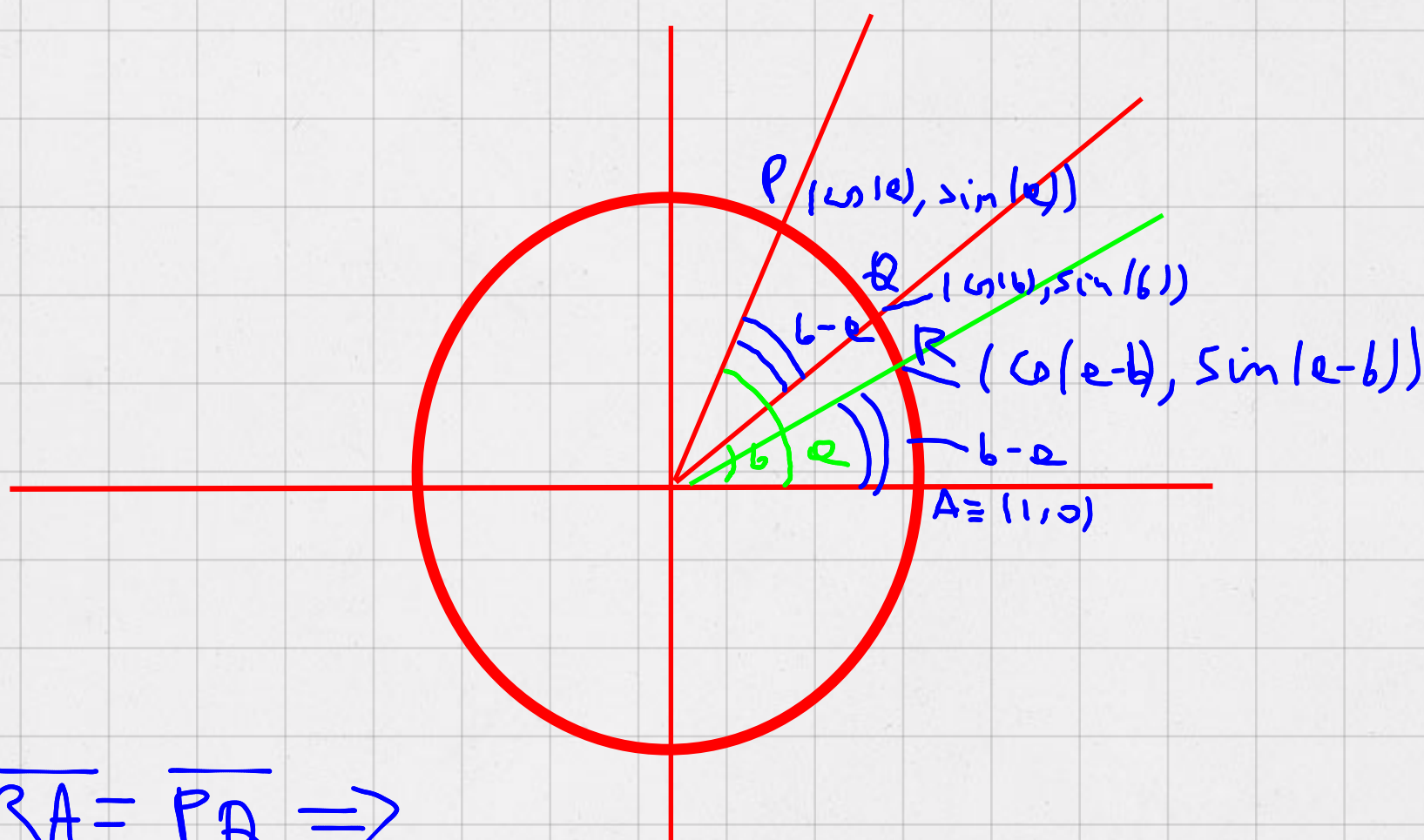
IL GRAFICO DI $\cos(x)$ CORRISPONDE A QUELLO
 DI $\sin(x)$ TRASATO A SINISTRA DI $\frac{\pi}{2}$



$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$



$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$



$$\overline{RA} = \overline{PQ} \Rightarrow$$

$$\sqrt{(\cos(a) - \cos(b))^2 + (\sin(a) - \sin(b))^2} = \sqrt{(\cos(a-b) - 1)^2 + \sin^2(a-b)} \rightarrow$$

$$\cos^2(a) + \cos^2(b) - 2\cos(a)\cos(b) + \sin^2(a) + \sin^2(b) - 2\sin(a)\sin(b)$$

$$= \cos^2(a-b) + \sin^2(a-b) + 1 - 2\cos(a-b)$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$2 - 2\cos(a)\cos(b) - 2\sin(a)\sin(b) = 2 - 2\cos(a-b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

DA QUESTA SI DERIVA

$$\cos(a+b), \sin(a-b), \sin(a+b)$$

$$\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(b - (a - \frac{\pi}{2})\right) =$$

$$\cos(b)\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(b)\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\cos(b)\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - \sin(b)\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

$$= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$\cos(x)$ PARI
 $\sin(x)$ DISPARI

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)}$$

$$\sin(a+b) = \sin(b)\cos(a) + \sin(a)\cos(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \rightarrow$$

$$\sin(2b) = 2\cos(b)\sin(b)$$

$$2\cos^2(a) - 1 = \cos(2a)$$

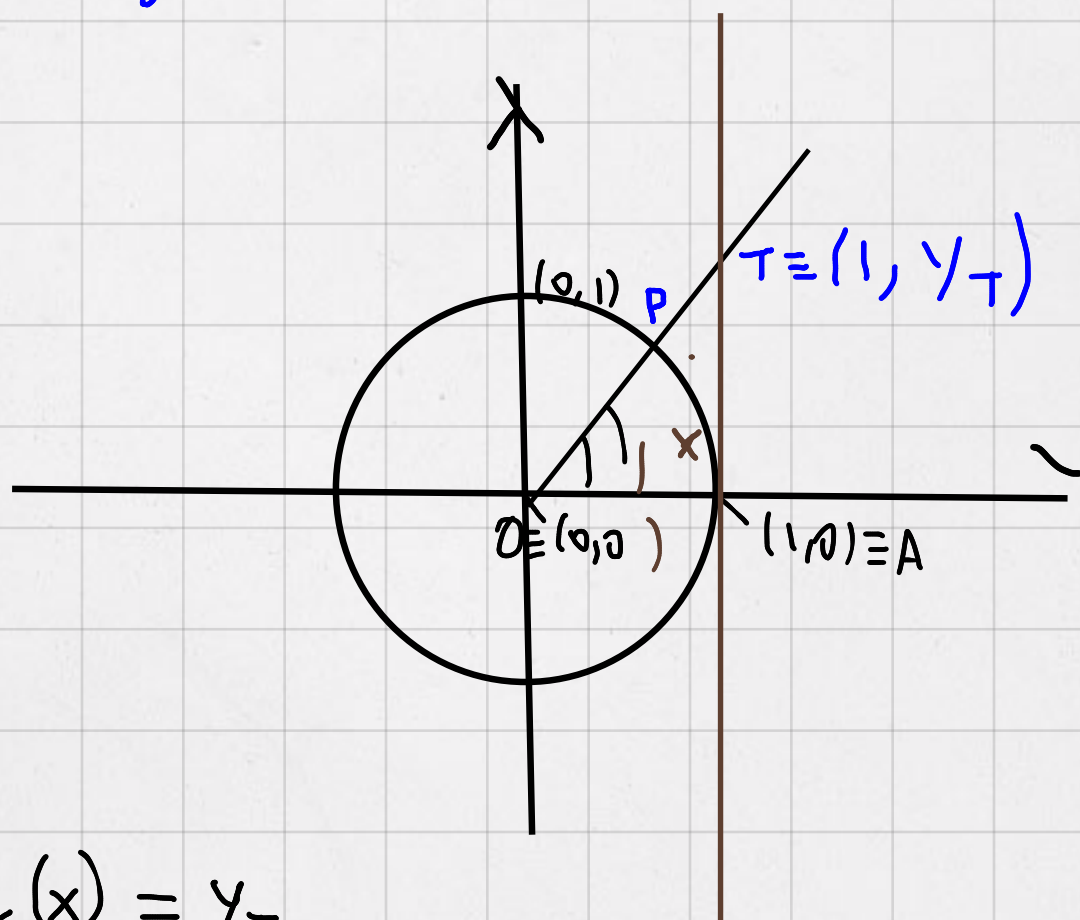
$$\cos(a) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(2a)}{2}}$$

$$\sin(a) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(2a)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$$

FUNZIONE TANGENTE

$$\tan(x)$$



$$\tan(x) = y_T$$

OSSERVIAMO CHE $\tan(\frac{\pi}{2})$ NON PUO' ESSERE DEFINITA
COSI' COME $\tan(\frac{3}{2}\pi)$

$$\text{INOLTRE } \tan(x + \pi) = \tan(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

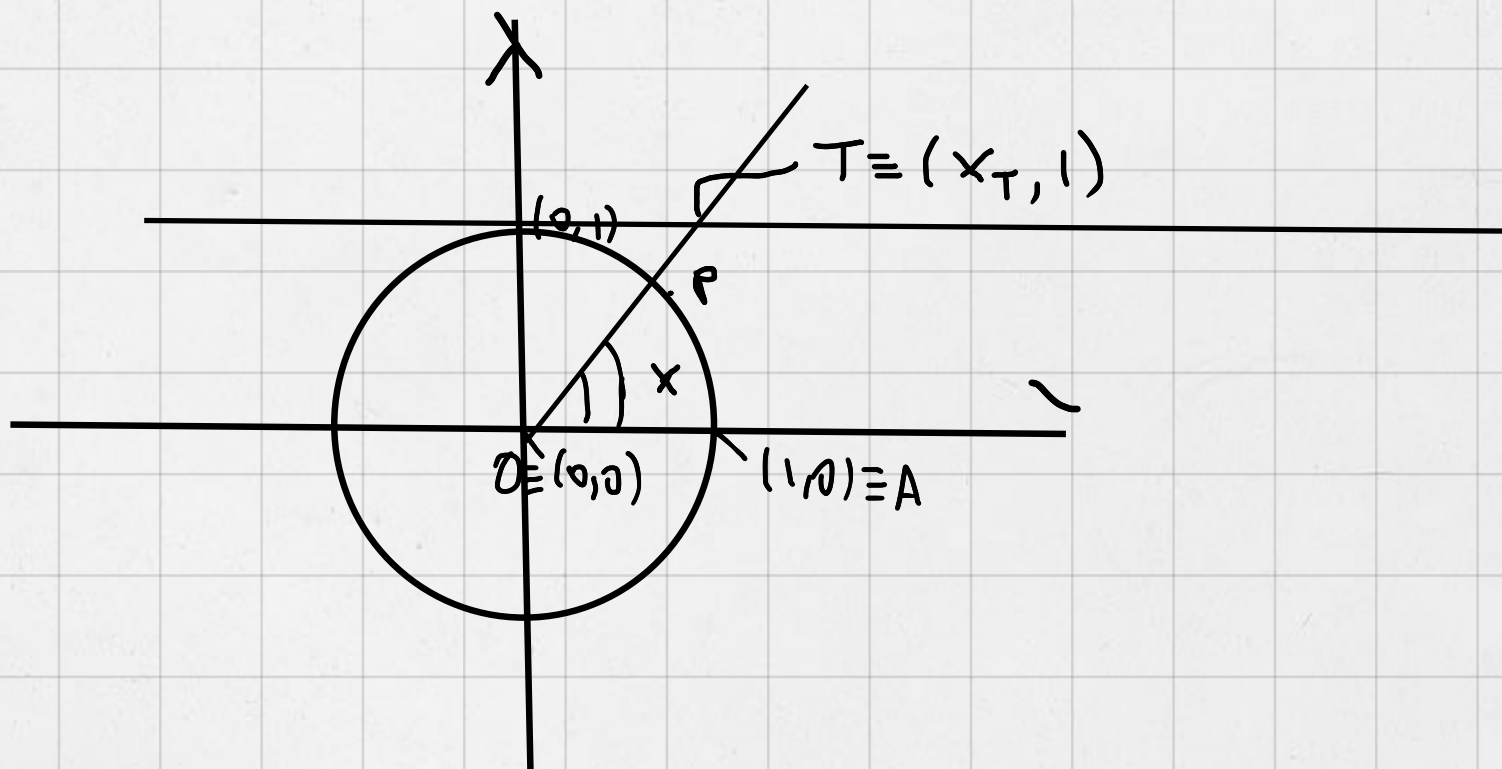
$$\downarrow$$

$$\text{Def di } \tan(x)$$

USANDO LA GEOMETRIA SI VEDE SUBITO

$$1: \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \longrightarrow \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$\cos(x)$



$$\cot(x) = x_T$$

OSSERVIAMO CHE $\cot(0)$ NON PUO' ESSERE DEFINITA
COSI' COME $\cot(\pi)$

$$\text{INOLTRE } \cot(x+\pi) = \cot(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$\downarrow$
 D_f

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

EQ TRIGONOMETRICHE

$$\cos(x) = q$$

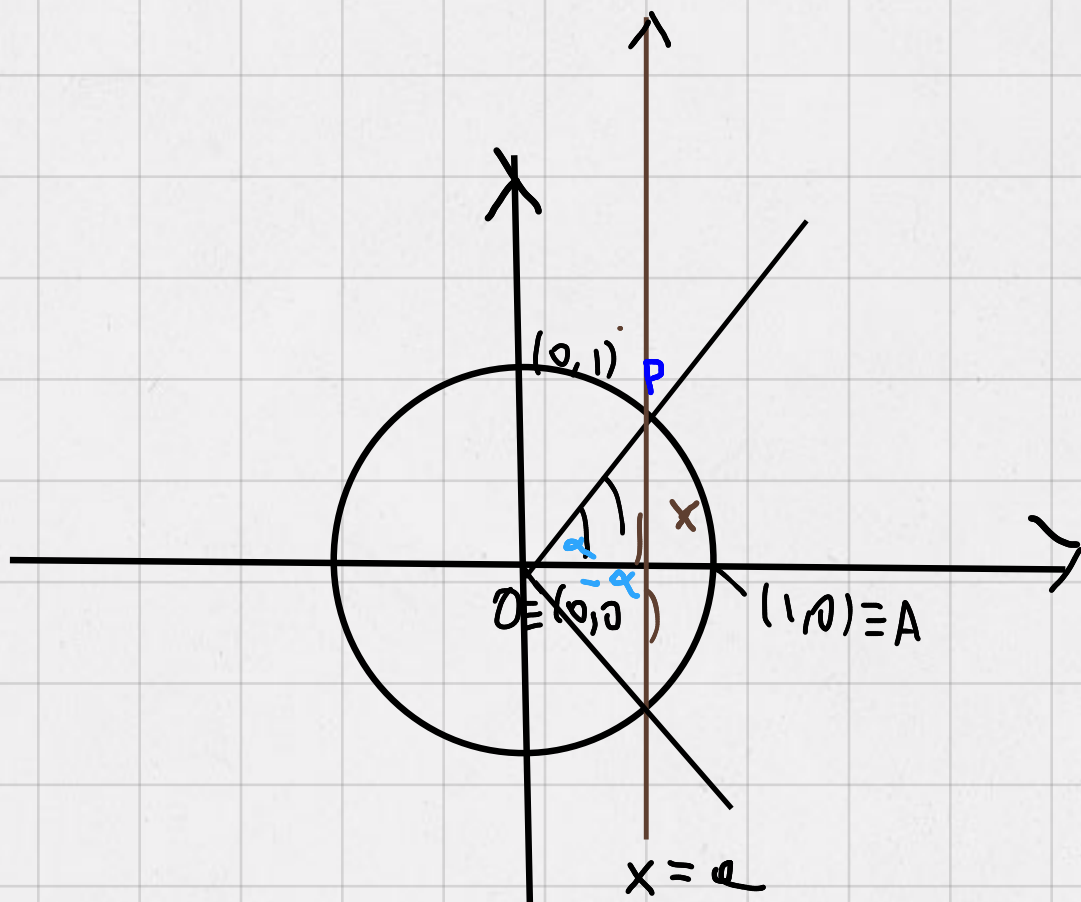
I° $q < -1$ $q > 1$ $\nexists$ SOLVZ.

II° $q = -1$ $\vee$ $q = 1$ $x = \pi$ $\vee$ $x = 0$ SONO
SOLUZIONI, TUTTE LE ALTRE?

$q = -1$ $x = \pi + 2k\pi$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

$q = 1$ $x = 2k\pi$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

III° $-1 < q < 1$



$\exists \alpha \in (0, \pi)$ t.c. $\cos(\alpha) = q$

QUINDI ANCHE $\cos(-\alpha) = q$

CHIAMAMO $\alpha = \arccos(q)$, QUINDI TUTTE LE
SOLVZ. SONO $x = \pm \arccos(q) + 2k\pi$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

ALLO STESSO MODO

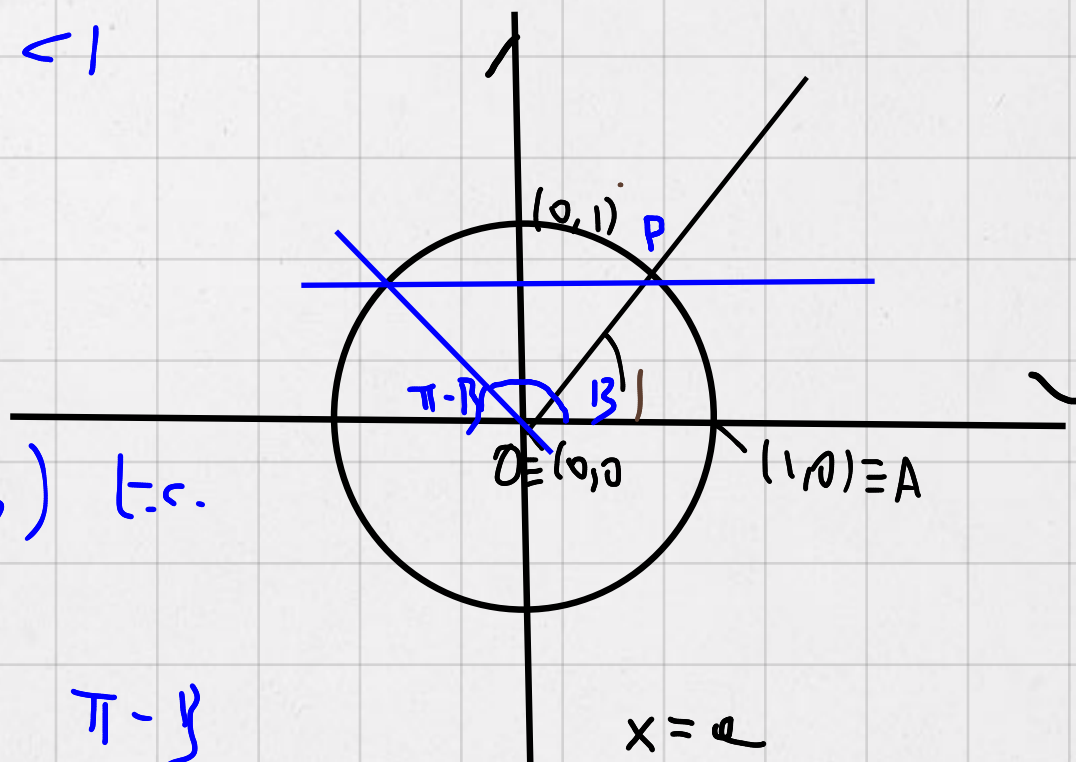
$$\sin(x) = b$$

I° $b < -1$ $b > 1$ $\nexists$ sol.

II° $b = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$b = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad //$

III° $-1 < b < 1$



$\exists \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ t.c.

$$\sin(\beta) = b$$

ALTRA SOLUZ. $\pi - \beta$

SE CHIAMIAMO $\beta = \arcsin(b)$

LE SOLUZIONI SONO

$$x = \arcsin(b) + 2k\pi \text{ e } \pi - \arcsin(b) + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

ATTENZIONE $\arcsin(x)$ e $\arccos(x)$

SONO LE FUNZIONI INVERSE DELLE FUNZ. $\cos(x)$ e $\sin(x)$ QUANDO QUESTE FUNZ. SONO CONSIDERATE

SU OPPORTUNI SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$

PIU' PRECISAMENTE

$\cos(x): [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ è INVERTIBILE (DECR)

LA SUA INVERSA DEF SULL'IMMAGINE $[-1, 1]$

SI CHIAMA $\arccos(y)$

$\sin(x): [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ è INVERTIBILE (CRFS)

LA SUA INVERSA DEF SULL'IMMAGINE $[-1, 1]$

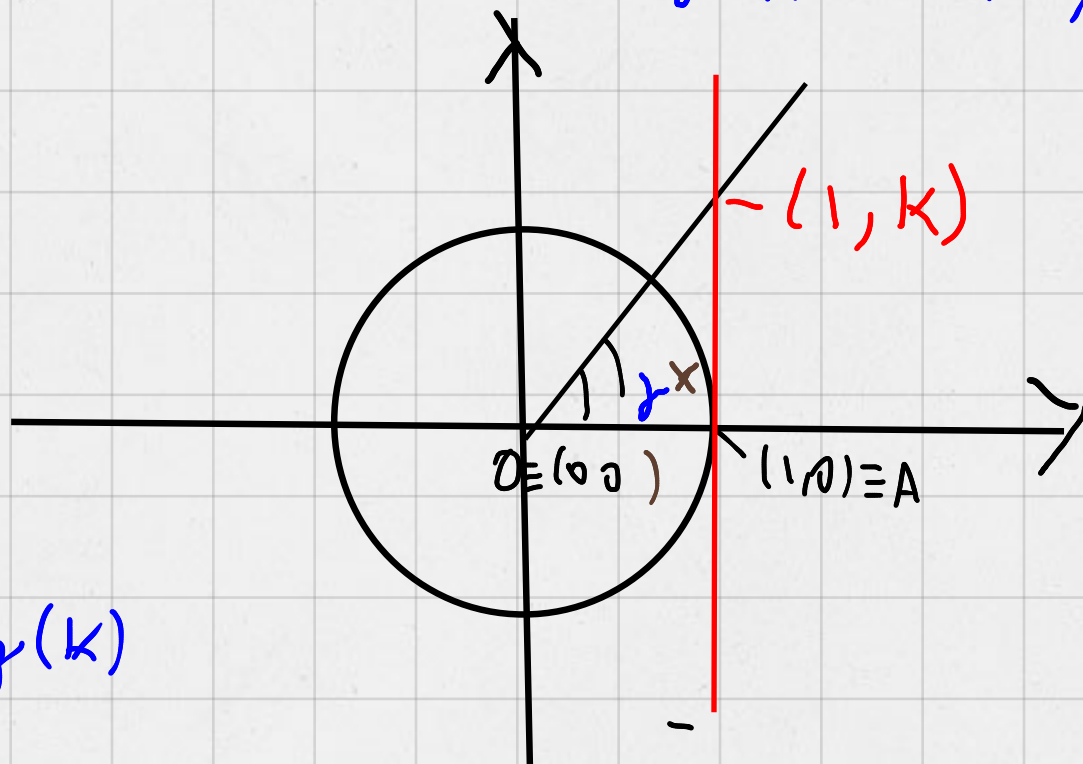
SI CHIAMA $\arcsin(y)$

$\arccos: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (IN REAZIONE $[0, \pi]$)

$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (IN REAZIONE $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

$\tan(x) = k$? $\exists x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ t.c. $\tan(x) = k$

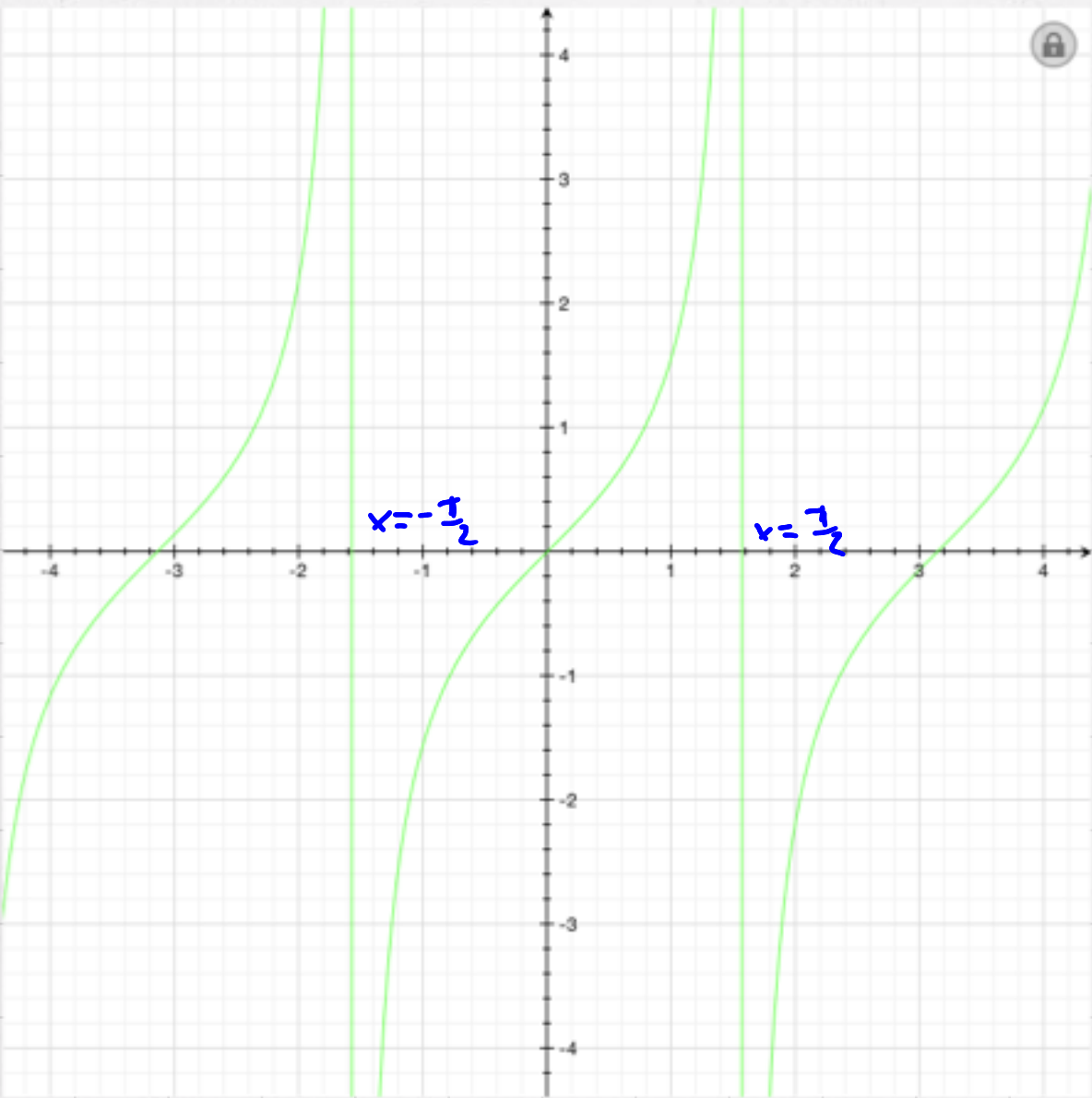
TUTTE LE SOLUZ. SONO $x + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$



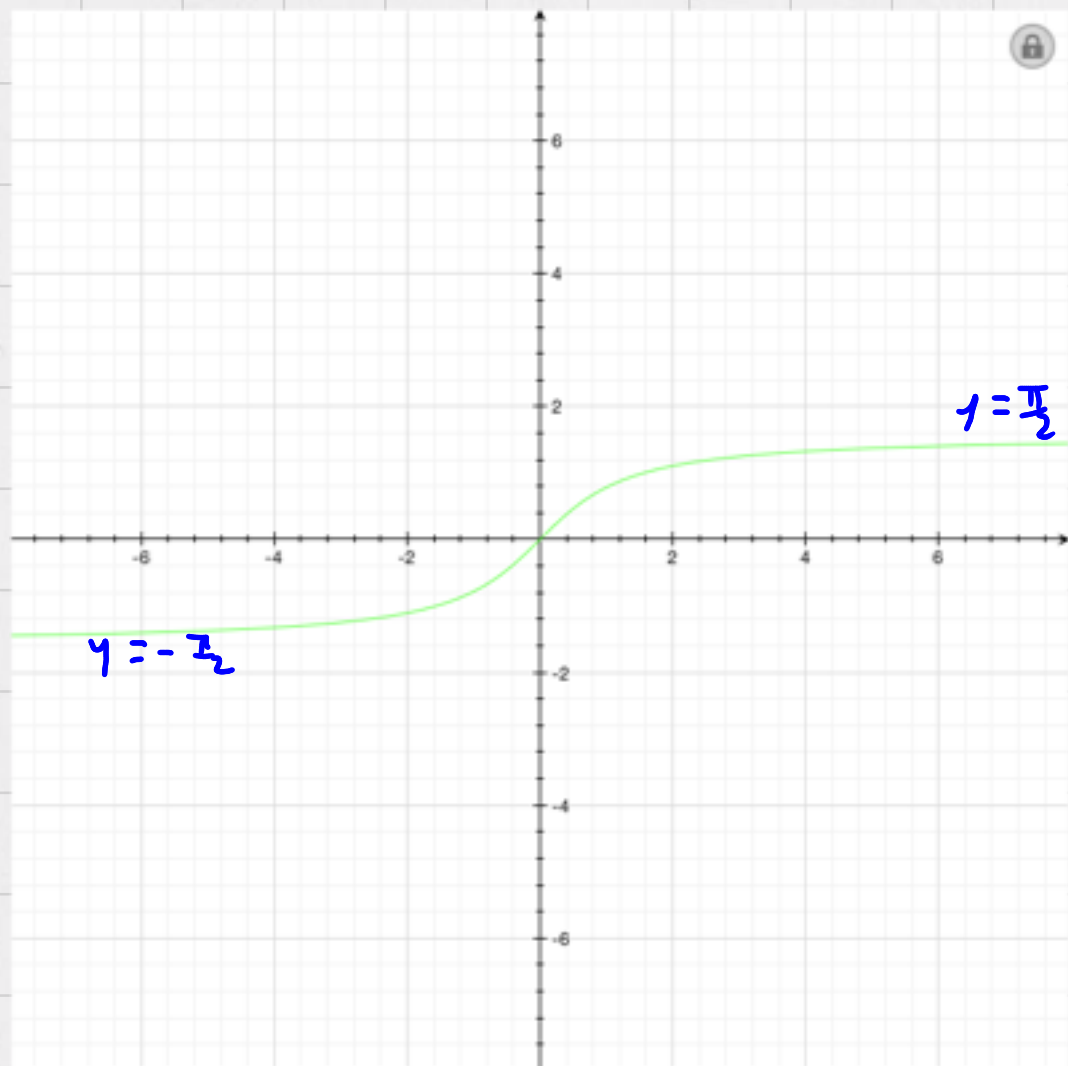
$$x = \arctan(k)$$

$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ INVERSA DI

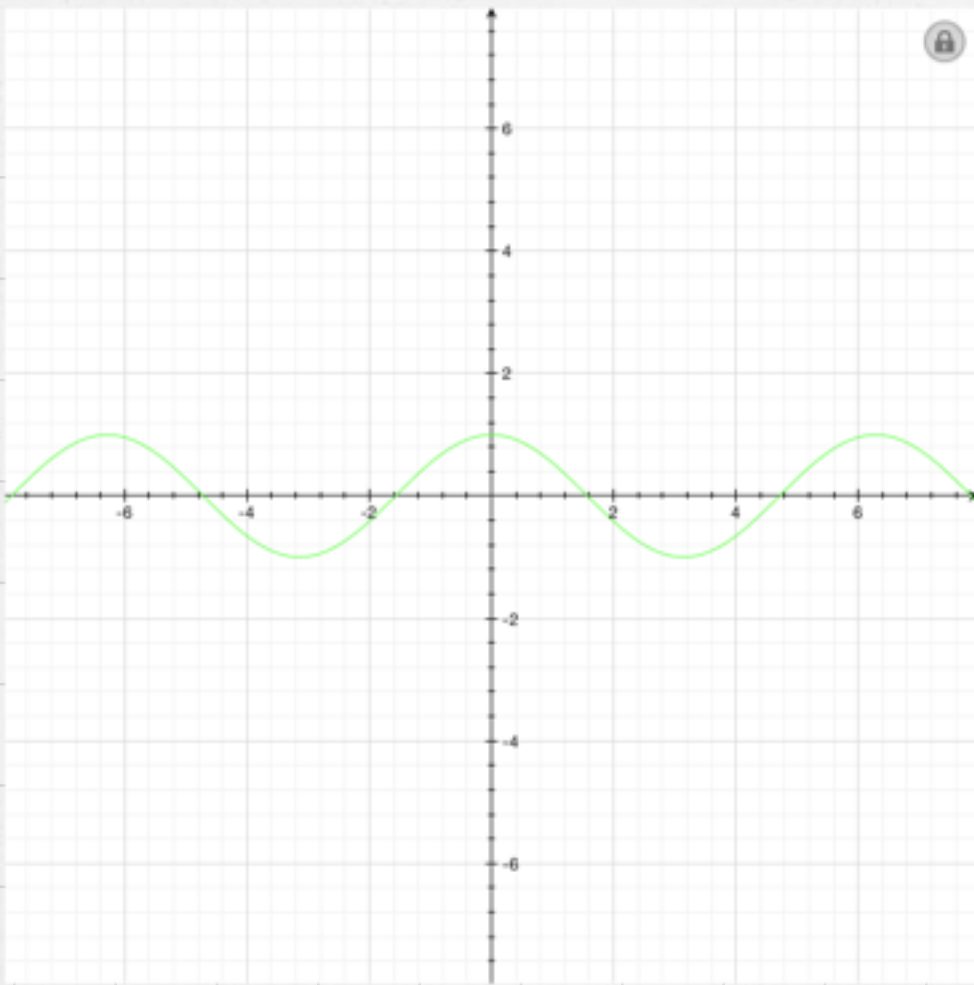
$\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$



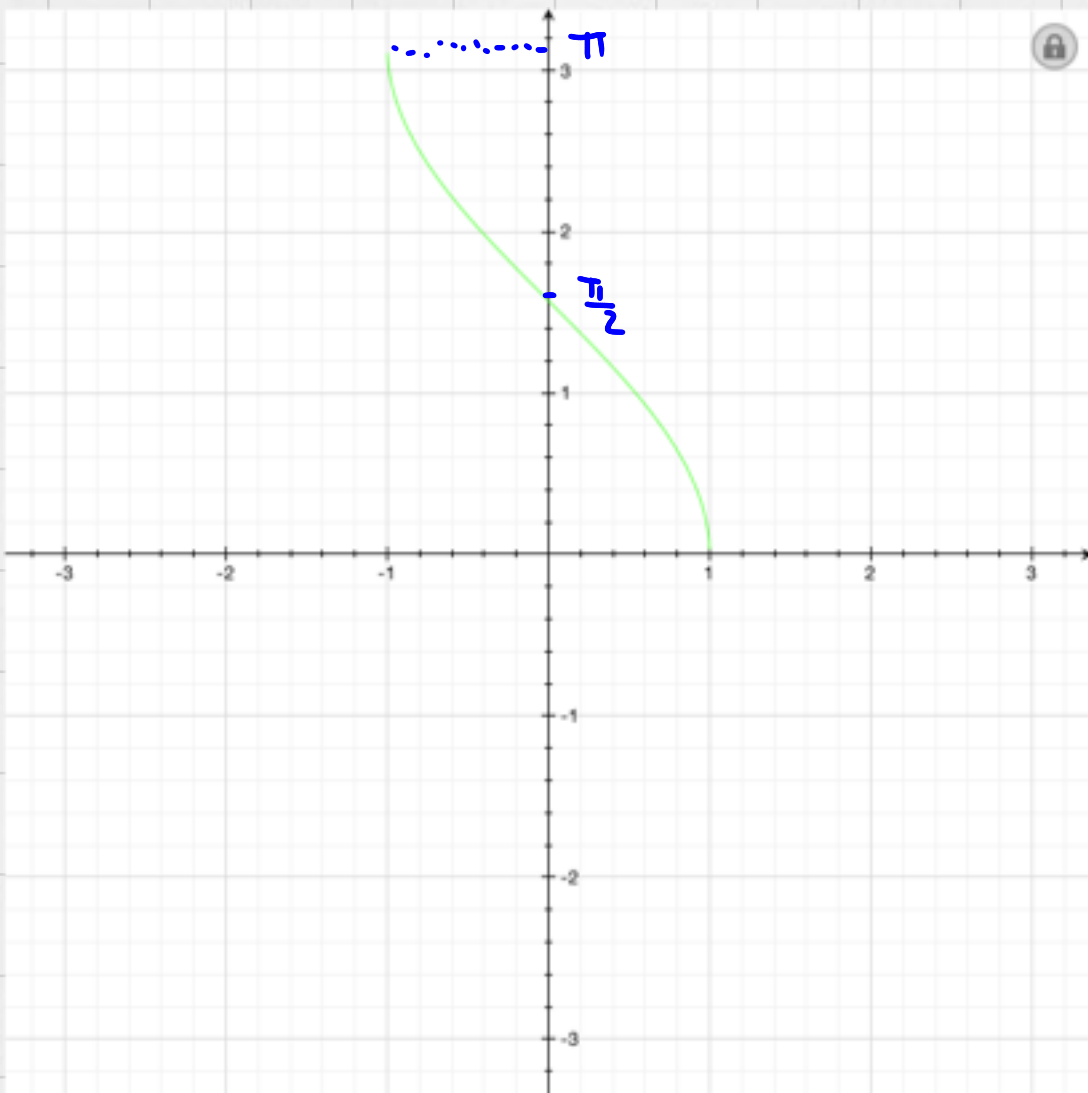
$$y = \tan(x)$$



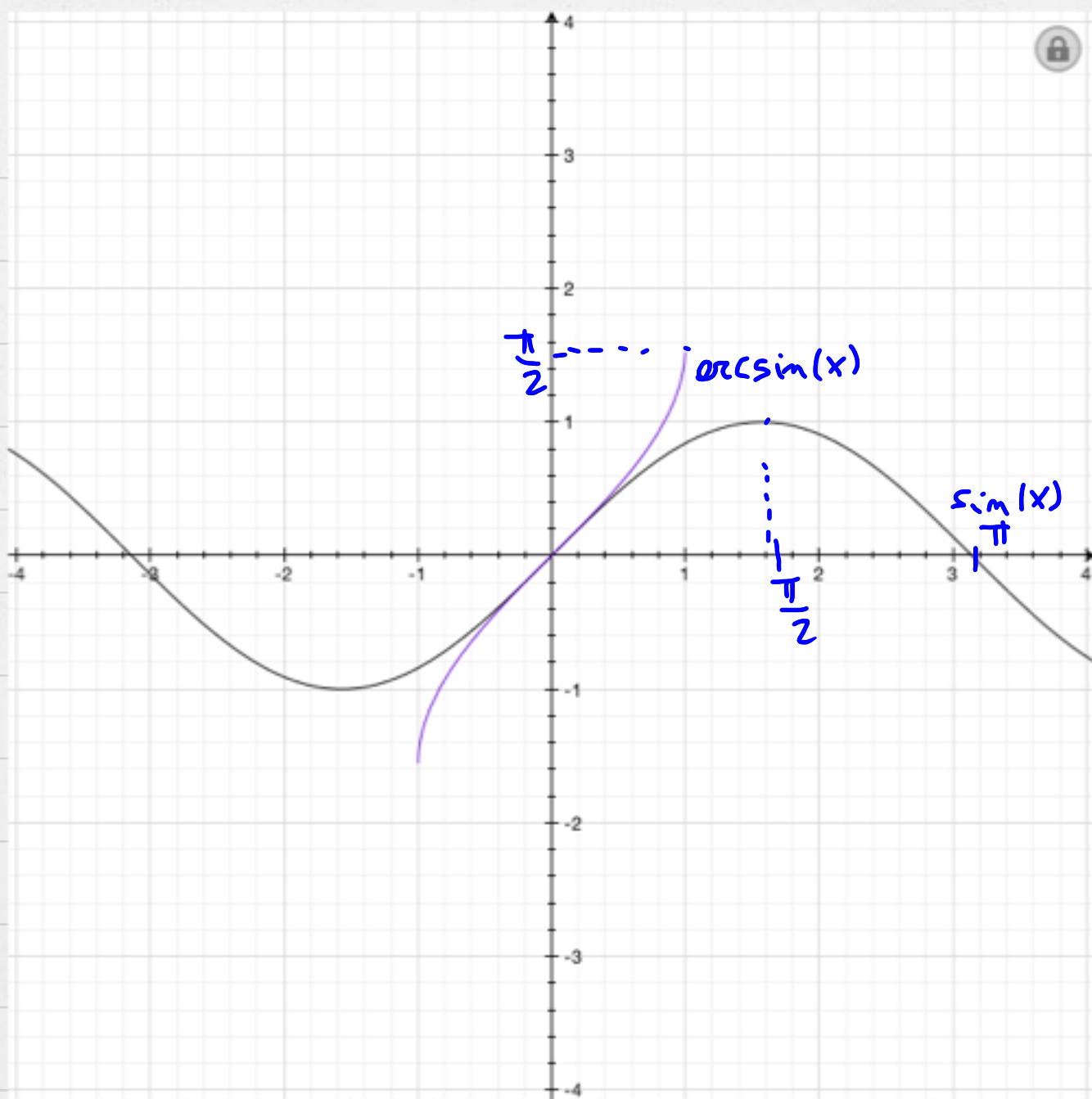
$$y = \arctan(x)$$



$$y = \cos(x)$$



$$y = \arcsin(x)$$



NOTARE LA SIMMETRIA DEI 2 GRAFICI RISPETTO
 ALLA BISETTRICE $y = x$