

LIMITE DEFINIZIONE INFORMALE

SIA I UN INTERVALLO APERTO

$$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in I$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad ? \quad l \in \mathbb{R}$$

SIGNIFICA CHE POSSIAMO TROVARE
VALORI DI $f(x)$ VICINI QUANTO VOGLIAMO
AD l A PATTO DI PRENDERE
VALORI DI x VICINI AD x_0 !

"VICINO"
IN $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ DISTANZA

$\longrightarrow |f(x) - l|$

$|x - x_0|$, RICORDIAMO CHE

ABBIAMO

2 SPAZI

DOMINIO

CODOMINIO

① SE IL LIMITE ESISTE
E' UNICO |||

② IL LIMITE DI SOMMA
O PRODOTTO DI FUNZIONI
E DATA DALLA SOMMA
O PRODOTTO DEI LIMITI

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

↓

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k \quad \text{COSTANTE}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2$$

IN GENERALE SE

$$f(x) = P_n(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$$

$$\text{Es} \quad \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 2x + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = m \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

ALLORA

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

$$\exists \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\text{e} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |g(x) - m| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_m(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_m(x)}{Q_m(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3}{1 - x^2 + x} = \frac{-2}{1} = -2$$

LA DEFINIZIONE DI LIMITE NON
È BANALE

SIA $s(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

UNA FUNZIONE CHE AL TEMPO t
CI INDICHA UN PUNTO SULLA
RETTA. SIA $t_0 \in (a, b)$ UN
ISTANTE DATO

FISSATO UN INTERVALLO DI TEMPO

x È INTERESSANTE CALCOLARE

$\frac{s(t_0+x) - s(t_0)}{x}$ QUESTA RAPPRESENTA

LA VELOCITA' MEDIA NELL'INTERVALLO
DI TEMPO (t_0, t_0+x)

POSSIAMO DEFINIRE LA FUNZIONE

$$f(x) = \frac{s(t_0+x) - s(t_0)}{x}$$

QUESTA VARIA CON x .

SE VOGLIAMO DAR SENSO ALLA
VELOCITA' ISTANTANEA DOBBIAMO
PENSARE AD x SEMPRE PIU'
"PICCOLO" QUESTO E' POSSIBILE
TRAMITE IL CONCETTO DI LIMITE!

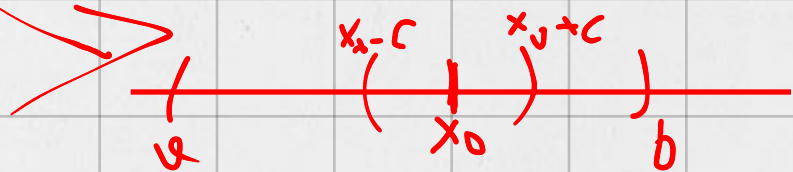
$$v(t_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{s(t_0+x) - s(t_0)}{x}$$

INTERNO APERTO, CENTRATO IN $x_0 \leadsto (x_0 - c, x_0 + c)$
 $x_0 - c < x < x_0 + c, \quad |x - x_0| < c.$

SE VOGLIO ESCLUDERE x_0 DALL'INTERNO
POSSO SCRIVERE $(x_0 - c, x_0) \cup (x_0, x_0 + c)$ O PPURE

$$0 < |x - x_0| < c$$

SI A f DEFINITA IN UN INTERNO CENTRATO IN x_0
ESCLUSO AL PIU' x_0



DIREMO CHE $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad [l \in \mathbb{R}]$

$$: \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\varepsilon \quad t.c.$$

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

OVVERO FISSATA UNA DISTANZA NEL

CODOMINIO ($\varepsilon > 0$) POSSO SCEGLIERE UNA
DISTANZA NEL DOMINIO (δ) DIVERGENTE

DA QUELLA SUL CODOMINIO TAČE
CHE PER OGNI PUNTO CHE DISTA
DA x_0 MENO DI δ , ESCLUSO x_0 ,
L'IMMAGINE DI $f[f(x)]$ DISTA
DA l MENO DI ϵ .

NO È FONDAMENTALE CHE x_0
VENGA ESCLUSO, PASTA PENSARE
ALL'ESEMPLO DI PRIMA

$$f(x) = \frac{s(t_0+x) - s(t_0)}{x}$$

HA SENSO FARE $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

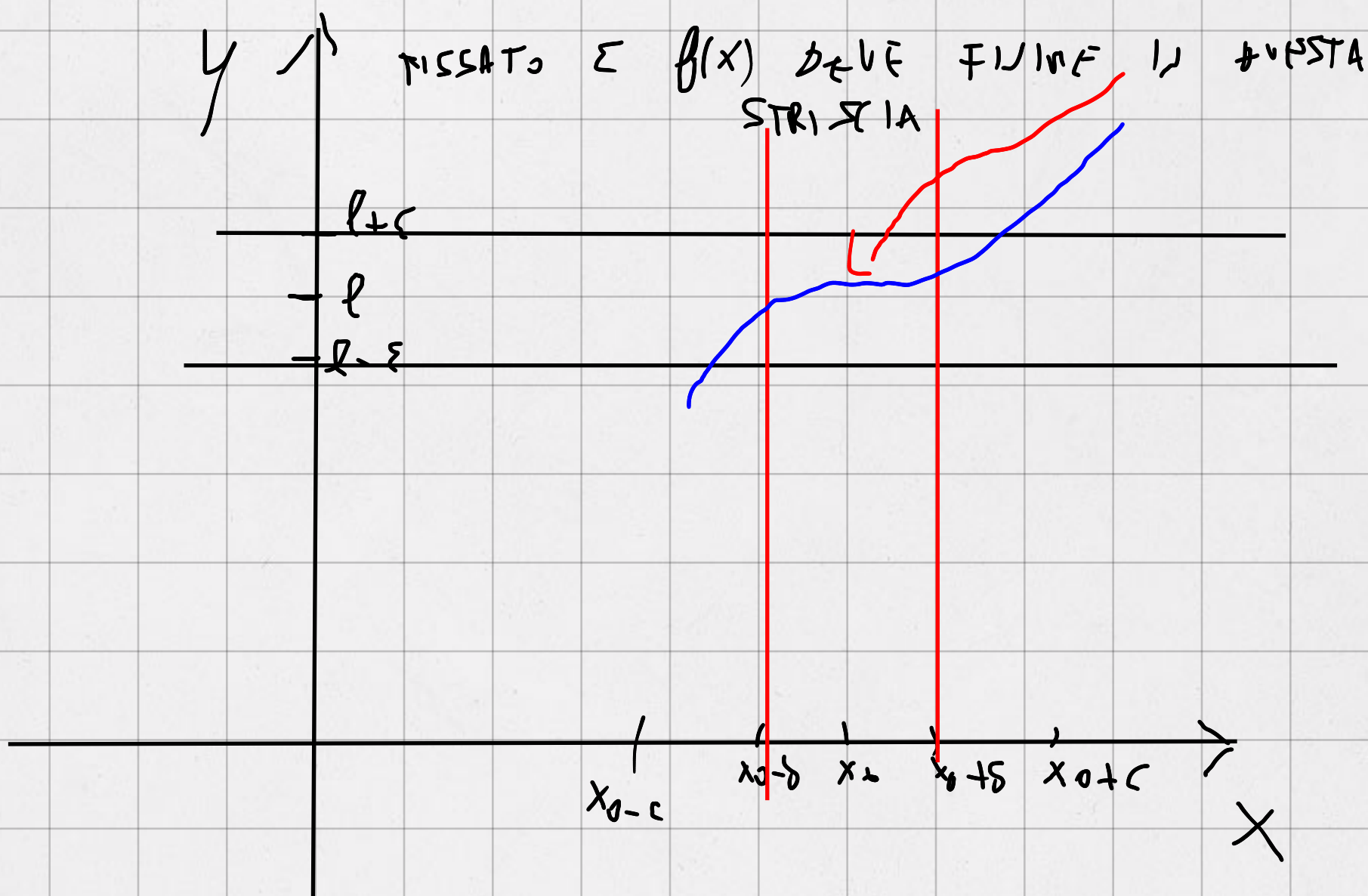
MA IL VALORE DI f IN $x=0$ NON POTREMO
DEFINIRLO TRAMITE L'ESPRESSIONE, VOLENDO
POTREMMO SCEGLIERE PER $f(0)$ UN VALORE
"CASUALE", MA IL SUO VALORE NATURALE,
SE ESISTE, È PROPRIO UGUALE A l
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$

PER QUESTO MOTIVO NON E' NECESSARIO
CHE LA FUNZIONE f SIA DEFINITA

IN x_0 PER POTER DEFINIRE $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

BASTA CHE SIA DEFINITA IN UN INTORNO

DI x_0 ESCLUSO x_0 .



OVVINGENTE PIU' SARA' PICCOLO ε PIU'

DOVEREMO SCEGLIERE $\delta = \delta_\varepsilon$ PICCOLO

A QUESTO PUNTO PER DIMOSTRARE
CHE $\forall$ DETERMINATO LIMITE E' PROPRIO
DOBBIAMO USARE LA DEFINIZIONE
CON ε e δ !

CASI SEMPLICI

① $f(x) = k$ (COSTANTE)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \quad \forall x_0 \rightarrow$ BANALE INFATTI

$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon$

POSSIAMO SCEGLIERE QUALSIVIS δ

② $f(x) = x \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0 \quad \forall x_0$

PIU' PRECISAMENTE $\forall \varepsilon \quad \boxed{\delta_\varepsilon = \varepsilon}$

SE $|x - x_0| < \delta$ ALLORA BANALMENTE

$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$

$$f(x) = x^2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = ? \quad 4?$$

$$|f(x) - 4| < \varepsilon \quad \exists \delta \dots$$

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \quad |x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$$

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{|x + 2|}$$

SE MI METTO IL V. L. TORNO FISSATO DI 2
 AD ESEMPPIO (1, 3) AVREMO CHE

$$3 < |x + 2| < 5 \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{|x + 2|} < \frac{1}{3}, \text{ quindi}$$

SE PRENDIAMO $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ (E SIANO IN (1, 3))

$$\text{AVREMO } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{|x + 2|} \text{ E QUINDI}$$

TORNANDO INDIETRO $|x^2 - 4| < \varepsilon$

NB LA VERIFICA DIRETTA ANCHE IN
 QUESTO CASO ELEMENTARE NON E' BANALE

E' FACILE CONFONDERE ε E δ
 PROVA TE A FARE

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} - 1 = ?$$

PROP $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ACCORDA
 $\varepsilon > 0$ $\forall \eta > 0$

DM SE PER ASSUNDO $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$ con $l_1 \neq l_2$ PRENDAMO

$$\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2} \quad \exists \delta > 0$$

$$|f(x) - l_1| < \varepsilon \quad e \quad |f(x) - l_2| < \varepsilon$$

QVLD

DIS. TRIANGOLARE
 $\uparrow$

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2} + \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

$$\Rightarrow |l_1 - l_2| < |l_1 - l_2| \quad \text{ASSUNDO!}$$

PROP $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = l + m$

DIM $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta'_\varepsilon \text{ s.t.}$

$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ s.t. } |x - x_0| < \delta'_\varepsilon \quad x \neq x_0$

$\exists \delta''_\varepsilon \text{ s.t.}$

$|g(x) - m| < \varepsilon \text{ s.t. } |x - x_0| < \delta''_\varepsilon \quad x \neq x_0$

Allora se prendiamo $\delta_\varepsilon = \min \{ \delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon \}$

$|f(x) + g(x) - (l + m)| = |f(x) - l + g(x) - m| \leq$

$|f(x) - l| + |g(x) - m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Dal momento che ε è arbitrario

Abbiamo la tesi

PROP se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \Rightarrow$

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = l \cdot m$

Questi teoremi semplificano notevolmente
il calcolo di limiti

ABRAMO ANCHE

PROP $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0 \Rightarrow \exists$

un intorno di x_0 $(x_0 - c, x_0 + c)$ t.c.

$f(x) > 0$ in $(x_0 - c, x_0 + c) \setminus \{x_0\}$

DIM BASTA PRENDERE $\varepsilon = \frac{l}{2}$ NELLA

DEFINIZIONE DI LIMITE e trovare $c = r_\varepsilon$

$$|f(x) - l| < \frac{l}{2} \quad \text{se} \quad |x - x_0| < c \quad x \neq x_0$$

$\downarrow$

$$-\frac{l}{2} < f(x) - l < \frac{l}{2} \rightarrow \frac{l}{2} \leq f(x) < \frac{3}{2}l$$

$\downarrow$

PERMANENZA DEL SEGNO

PROP SE $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$ HA SEGNO

CONSIDERARE $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$, QUESTO LIMITE

ESISTE E VALLE PROPRIO $\frac{1}{l}$

DA QUESTA DERIVA

PROP SE $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \neq 0$

$$\exists \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

RITROVIAMO QUANTO DETTO SULLE
FUNZIONI RAZIONALI, BASTA SAPERE

CHE $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$, $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \quad \forall x > x_0$$

SI PUO' DIMOSTRARE USANDO

LA DEFINIZIONE NOI FACCIAMO

VEDERE CHE SE $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = l$

ALLORA NECESSARIAMENTE $l = \sqrt{x_0}$

INFATTI $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = l^2$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \Rightarrow x_0 = l^2$$

QUINDI $l = \sqrt{x_0}$ [l E' NECESSARIAMENTE ≥ 0]

ANALOGAMENTE SI AVRA'

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

OSSERVIAMO CHE SE $f(x) \geq 0$ in
un intorno $(x_0 - c, x_0 + c) \setminus \{x_0\}$

ALLORA SE ESISTE $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

SI HA $l \geq 0$

QUESTO È DOVUTO AL TH DELLA
PERMANENZA DEL SEGNO

SI OSSERVI INOLTRE CHE SE
 $f(x) > 0$ in $(x_0 - c, x_0 + c) \setminus \{x_0\}$

QUESTO IN GENERALE $\nRightarrow l > 0$ MA

SOLO $l \geq 0$

BASTI PENSARE ALLA FUNZIONE $|x|$

> 0 in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ MA $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$

OSSERVIAMO CHE

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - l = 0$$

QUINDI POTREMMO SEMPRE RICONDURCI

A DIMOSTRARE CHE UN LIMITE FA 0.