

VALE LA SEGUENTE DISUGUAGLIANZA

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

QUESTA E' COME DIRE

$$-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|$$

↓

$$|a| \leq |a-b| + |b| \text{ DIS. TRIANG.}$$

$$|b| \leq |a| + |a-b|$$

DA QUESTA DEDUCIAMO CHE SE

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{ALLORA} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |f| = |l|$$

INFATTI

$$||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| \quad \text{QUINDI BASTA}$$

USARE LA DEFINIZ. DI LIMITE

IL VICEVERSA E' FALSO

$$\text{SE } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l| \rightarrow \text{NON IMPLICA CHE } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

BASTA PRENDERE LA FUNZIONE

$$f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \nexists \quad \text{MENTRE} \quad \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1$$

NEL CASO $l=0$ INVECE SI HA

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

IN TUTTI I

$$||f(x)| - 0| = ||f(x)|| = |f(x)| = |f(x) - 0|$$

QUINDI IN GENERALE ABBIAMO

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - l = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} |x^2 - 3x - 4| = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{|x-7|+4} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+1|}{\sqrt{x+4}} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = ?$$

↓

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{x} =$$

$$\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

ALTRI TIP) DI LIMITE

INTERNO DI $+\infty$ E $-\infty$

$(a, +\infty)$ E' UN INTERNO DI $+\infty$

$(-\infty, a)$ E' UN INTERNO DI $-\infty$

POTREMMO CONSIDERARE

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty (-\infty), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty (\mp\infty) \dots$$

L'IDEA E' DI PENSARE I

LIMITI IN FUNZIONI DEGLI INTERNI

IDEA INTUITIVA $\mathbb{R} \sim \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

È UN GENERALE DARE SENSO A

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{ovv} \quad x_0, l \in \overline{\mathbb{R}}$$

PRIMA COSA LA f DEVE ESSERE
DEFINITA IN UN INTORNO DI x_0 (ESCLUSO
 x_0)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{'SE PER OGNI INTORNO } I$$

DI l ESISTE UN INTORNO J DI x_0 t.c.
SE $x \in J \setminus \{x_0\}$ ALLORA $f(x) \in I$ ''

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad f = f_M \quad t.c.$$

$$\exists \varepsilon \quad 0 < |x - x_0| < \delta, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

$$f(x) > M \rightarrow f(x) \in (M, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad l \in \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c = c(\varepsilon) \quad t.c. \quad \exists \varepsilon \quad x > c, \quad x \in (c, +\infty)$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon \rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0 \quad \exists c = c(M) \quad t.c.$$

$$x > c, \quad x \in (c, +\infty) \quad s.t. \quad f(x) > M$$

$$f(x) \in (M, +\infty)$$

TUTTE QUESTE DEFINIZIONI SI POSSONO
SCRIVERE PER I LIMITI $1/\infty$ E $0/\infty$ E I LIMITI
 $-\infty$, SOSTITUENDO GLI INTORNI DI $+\infty$ CON QUELLI
DI $-\infty$

$$\in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c = c(\varepsilon) \quad \text{t.c.}$$

$$\forall x < c, \quad x \in (-\infty, c) \quad \text{t.c.}$$

$$\forall x \quad |f(x) - l| < \varepsilon, \quad f \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

$$\text{Fissato } \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{1}{x^2 + 1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{1 + x^2} < \varepsilon$$

$$1 + x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \quad x^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad (x > 0, \varepsilon < 1)$$

$$x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$$

ovvero BASTA PRENDERE

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$$

$$\text{se } x > c \Rightarrow \left| \frac{1}{1 + x^2} \right| < \varepsilon$$

$$\text{NEL CASO} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad x_0, l_0 \in \overline{\mathbb{R}}$$

VALGONO I TH SULLA SOMMA

PRODOTTI RECIPROCI DEI LIMITI?

SE $x_0 = \pm \infty$ E I LIMITI HANNO

VALORE FINITO, SICURAMENTE SÌ !!!

ALTRIMENTI VALGO NO USANDO QUESTA
ACCORTEZZA

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$$

$$SE \quad l = \pm \infty \quad E \quad m \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = \pm \infty$$

$$SE \quad l = \pm \infty \quad E \quad m = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = \pm \infty$$

$$SE \quad l = \pm \infty \quad m = \mp \infty$$

ALCORA NON POSSIAMO DIRE NULLA

IN ALTRE PAROLE

$+\infty - \infty$ E' UNA FORMA

INDETERMINATA

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \quad l, m \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = ?$$

$$\text{SE } l_0 = \pm \infty \quad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \pm \operatorname{sgn}(m) \infty$$

$$\text{SE } l_0 = \pm \infty \quad m_0 = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = +\infty$$

$$\text{SE } l_0 = \pm \infty \quad m_0 = \mp \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = -\infty$$

$$\text{SE } l_0 = \pm \infty \quad m_0 = 0$$

$$\infty \cdot 0 \quad \text{INDETERMINATA}$$

$$\text{SE } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_0 \quad l_0 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = ? \quad l_0 = 0 \quad l_0 = \pm \infty ?$$

$$\text{SE } l_0 = \pm \infty \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\text{SE } l_0 = 0 \quad \text{E' DEFINITA } f \text{ IN } \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$$

DI O. ACCORRA $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$ POTREBBE NON ESISTERE

PERO' SE $f(x)$ HA SEGNO COSTANTE
IN UN INTORNO ACCORRA

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \pm \infty$$

IL SEGNO E' RELATIVO
ALL'INTORNO

ESEMPLI $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = ?$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & +\infty - \infty \text{ INDETERMINATA} \\ & \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0 \quad \frac{1}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{INDETER.}$$

$$x^3 + 2x + 3 = x^3 \left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)$$

$$x^2 + 1 = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 1} = x \left(\frac{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty}$$

$$x \left(\frac{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$+\infty$

" $1 \cdot (+\infty)$ "

IN GENERALE POSSIAMO CALCOLARE

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

L'IDEA E' DI RACCOLGERE
IL MONOMIO DI GRADO PIU'
ALTO

$\left\{ \begin{array}{ll} n > m & \text{IL LIMITE E' } \infty \text{ CON IL SEGNO CHE DIPENDE DAL COEF DI GRADO MAGGIORE} \\ n < m & \text{IL LIMITE E' } 0 \\ n = m & \text{IL LIMITE E' DATO DAL RAPPORTO DEI COEFF. DI GRADO PIU' ALTO} \end{array} \right.$

$$\text{ES} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x + 1}{4x^4 + 5x^3 + 3} = \frac{1}{4} \quad \text{VERIFICATE!!}$$