

continuità

SIA $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I INTERVALLO,
APERTO

SIA $x_0 \in I$

f SI DICE CONTINUA IN x_0 SE E

SOLO SE $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

f SI DICE CONTINUA IN I SE E'
CONTINUA IN OGNI PUNTO DI I

SE f E' DEFINITA SU INTERVALLO
CHIUSO DA UNA PARTE LA FUNZIONE SI
DIRA' CONTINUA SE NEL PUNTO DI
FRONTIERA x_0 , APPARTENENTE ALL'INTERVALLO,

ESISTE RISPETTIVAMENTE, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

SE x_0 E' UN ESTREMO SINISTRO,

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ SE x_0 E' UN ESTREMO
DESTRO

ESEMPIO $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

f è CONTINUA in $[a, b]$ se f è CONTINUA
in (a, b) e $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ e

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

ESEMPI DI FUNZIONI CONTINUE SU $\mathbb{R}$

POLINOMI, FUNZIONI $\sin(x)$, $\cos(x)$,

MODULO DI POLINOMI

$$f(x) = p_n(x) \quad f(x) = |p_n(x)| \quad \text{MA ANCHE}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$\sqrt{x}$ è CONTINUA in $[0, \infty)$

DALLA DEFINIZIONE SEGUE SUBITO
CHE SOMMA E PRODOTTO DI FUNZIONI
CONTINUE SU UN INTERVALLO DATO I
SONO ANCORA CONTINUE IN TALE INTERVALLO

$$f(x) = \sqrt{x} + x \sin(x) \rightarrow \text{CONTINUA in } [0, \infty)$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x}} \rightarrow \text{CONTINUA in } (0, \infty)$$

IN MODI NATURALI SE A È UNIONE
DI INTERVALLI $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

DIREMO CHE f È CONTINUA IN A SE
È CONTINUA IN OGNI INTERVALLO CONTENUTO
IN A .

ES $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ È CONTINUA IN
 $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$f = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ (FUNZ. RAZIONALE) È
CONTINUA NEL SUO INSIEME
DI DEFINIZIONE

$f(x) = \tan(x)$ CONTINUA IN $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$f(x) = \frac{\sin(x)}{|x|-1}$ CONTINUA IN $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

.....

SIA f DEFINITA IN UN INTERVALLO CENTRATO
IN x_0 , ASCISSA AL PIV x_0

$$(x_0 - c, x_0 + c) \setminus \{x_0\}$$

COME SAPPIAMO HA SENSO STUDIARE

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

TRE CASI

1) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, SI PARLA DI

DISCONTINUITA' ELIMINABILE NEL SENSO
CHE PONENDO $f(x_0) = l$ LA FUNZIONE
DIVENTA CONTINUA IN x_0

(i) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_+ \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_- \in \mathbb{R}$

MA $l_- \neq l_+$, SI DICE DISCONTINUITA'

DI I^e SPECIE

(ii) NEGLI ALTRI CASI SI PARLA DI

DISCONTINUITA' DI II^e SPECIE

ESEMPIO $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ DEFINITA E CONTINUA
 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, SE FACCIAMO

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{CI ACCORGIAMO CHE}$$

SI TRATTA DI UNA DISCONTINUITA' ELIMINABILE
IN ALTRE PAROLE $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

E' CONTINUA IN $\mathbb{R}$.

ES $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \rightarrow \text{DISC. DI 1^a SPECIE}$$

ES $\sin\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{x}$, DISC. DI 2^a SPECIE

ANCHE SE $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \nexists$ MENTRE

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x-4} \quad x=4?$$

$$f(x) = [x] \quad x=2?$$

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sqrt{x}} \quad x=0?$$

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} \quad x=0?$$

SIA g FUNZIONE DEFINITA IN $(y_0 - c, y_0 + c)$
CONTINUA IN y_0 $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0) =: l$

OPPURE SIA DEFINITA IN UN INTORNO DI
 $+\infty$ O $-\infty$ E.
 $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = l$ o $\lim_{y \rightarrow -\infty} g(y) = l$
 $l \in \overline{\mathbb{R}}$

SIA f UNA FUNZIONE TACCA CHE IN
UN INTORNO DI x_0 (CENTRO, DESTRO,
SINISTRO, ESCLUSO A PIV' x_0)

SIA DEFINITA $g \circ f(x)$
E $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow x_0^+) \\ (x \rightarrow x_0^-)}} f(x) = y_0$ OPPURE $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ o
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

ALLORA $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow x_0^+) \\ (x \rightarrow x_0^-)}} g \circ f(x) = l$

L'ENUNCIATO SEMBRA COMPLICATO, MA UN
PARTICOLARE DICE CHE LA COMPOSIZIONE DI
FUNZ. CONTINUE E' CONTINUA

INFATTI SE $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ E
 $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0)$ PER $y_0 = f(x_0)$

(OVVIAMENTE DEVE ESSERE DEFINITA $g \circ f$)
SI HA $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0) = g(f(x_0))$

QUINDI AD ESEMPLO

$\sqrt{x^2+4}$ È CONTINUA (NP. $x^2+4 \geq 0$) IN $\mathbb{R}$

$\sin(x^2-x+1)$ È CONTINUA IN $\mathbb{R}$

$|x^2 \sin(x)|$ CONTINUA IN $\mathbb{R}$

$\sin(\sqrt{x})$ È CONTINUA IN $[0, \infty)$

$\frac{1}{\sin(\sqrt{x^2-1})}$ CONTINUA SE $x^2-1 > 0$ $\sqrt{x^2-1} \neq k\pi$
 $k \in \mathbb{Z}$

$x < -1, x > 1$ $x^2-1 \neq k^2\pi^2 \rightarrow x \neq \pm\sqrt{k^2\pi^2+1}$
 $(-\infty, -1) \cup (1, \infty) \setminus \{ \pm\sqrt{k^2\pi^2+1}, k \in \mathbb{Z} \}$

ABBIAMO ANCHE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3+x)}{x^3+x} = ?$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{\sin(y)}{y} & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases} \quad \text{CONTINUA IN } 0$$

$$\frac{\sin(x^3+x)}{x^3+x} = g \circ f \quad f(x) = x^3+x \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^3+x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3+x)}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow 0} g \circ f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$$

POSSIAMO ANCHE PENSARLO COME CAMPIO
 DI VARIABILE $y = x^3+x$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{(x-1)(x+1)} (x+1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} (x+1)$$

$$y = x^2 - 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} (x+1) = 1 \cdot 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1}{|x-1|}} = ?$$

$$g(y) = \sqrt{y} \quad f(x) = \frac{1}{|x-1|} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty$$

$$g \circ f = \sqrt{\frac{1}{|x-1|}} \quad \leadsto \lim_{x \rightarrow 1} g \circ f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^3} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = ?$$

$$\text{sub. } y = x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \arctan\left(\frac{1}{(x-1)}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \lg(x) = ? \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \operatorname{arctg}(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \lg(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \lg(x)$$

$$y = x - \pi$$

IL RISULTATO DI PRIMA VALE ANCHE

$$\text{SE } x_0 = +\infty \text{ } x_0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(y) = \frac{\sin(y)}{y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

TENDE

$$x \rightarrow +\infty \downarrow f(x) = \frac{1}{x} \downarrow 0$$

CALCOLARE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \pi \right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + 1} - 1 \right) x$$

$$\text{SIA } P_m(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\text{CALCOLARE } \lim_{x \rightarrow -\infty} P_m\left(\frac{1}{x}\right)$$

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

Th DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

SIA f CONTINUA IN I INTERVALLO APERTO

ALLORA $\forall x_0 \in I$ t.c. $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$)

ESISTE UN INTERVALLO J t.c. $x_0 \in J \subseteq I$

t.c. $f(x) > 0$ in J ($f(x) < 0$ in J)

E' IMMEDIATA CONSEGUENZA DEL TH VISTO

VISTO IN GENERALE PER I LIMITI

TEOREMA SULL'ESISTENZA DEGLI ZERI

SIA f CONTINUA IN $[a, b]$ (INTERVALLO CHIUSO) TALE CHE $f(a) < 0$ $f(b) > 0$ (OPPURE $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$) ALLORA
 $\exists$ ALMENO UN PUNTO x_0 t.c. $f(x_0) = 0$



PER ANDARE DAI NEGATIVI AI POSITIVI DEVO
PASSARE PER 0 !!

COSÌ FONDAMENTALI

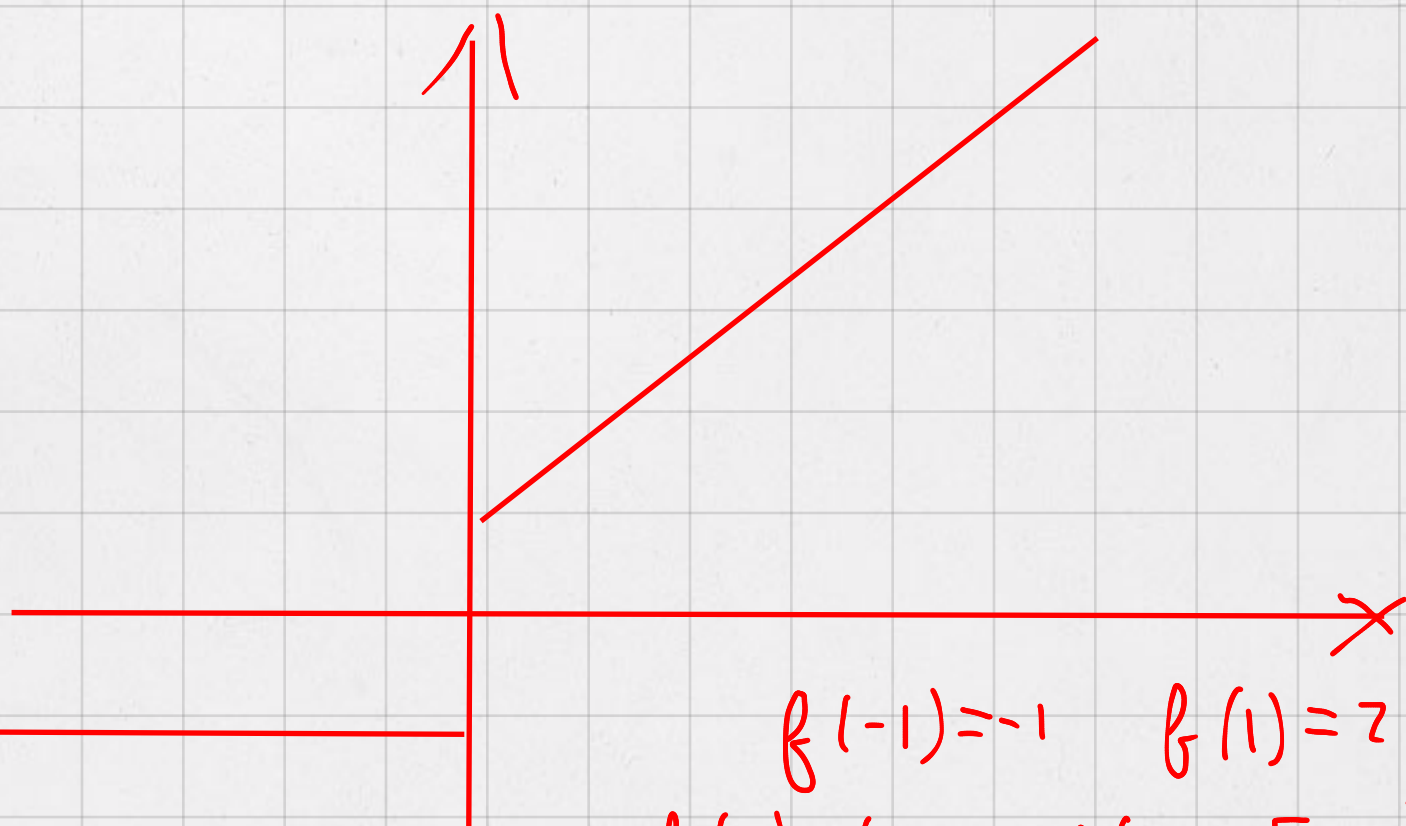
1) f CONTINUA

2) f $[a, b]$ E' UN INTERVALLO

LA DIMOSTRAZIONE NON È VALIDA

f NON CONTINUA È FALSO

ESEMPIO $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



$$f(-1) = -1 \quad f(1) = 2 \quad \text{MA}$$
$$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$$

ALTRO ESEMPIO $f(x) = \frac{1}{x}$ in $\underline{[-1, 0) \cup (0, 1]}$

↓
NON È UN
INTERVALLO

$$f(-1) = -1 \quad f(1) = 1 \quad \text{MA}$$

$$f(x) \neq 0 \quad \forall x$$



NOTA BENE IL TEOREMA CI ASSICURA

L'ESISTENZA DI UNA SOLUZIONE DELL'eq

$f(x)=0$ ANCHE SE NON SIAMO IN GRADO

DI RISOLVERLA

$$\text{ES } f(x) = \sin(x) + 2x - 3$$

$\exists$ SOLUZE DELL'eq $f(x)=0$

f CONTINUA! $f(0) = -3$ $f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \pi - 3 > 0$

$\Rightarrow \exists x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ t.c. $f(x_0) = 0!$

IN REALTA' OLTRE ALL'INTERESSE
TEORICO QUESTO RISULTATO SUGGERISCE ANCHE
UN METODO PER APPROSSIMARE LE SOLUZIONI

ESEMPIO f CONTINUA IN $[a, b]$

$f(a) < 0$ $f(b) > 0 \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b]$ t.c. $f(x_0) = 0$

$c_1 = \frac{a+b}{2}$ SE $f(c_1) > 0$ PRENDIAMO $[a, c_1]$

SE $f(c_1) < 0$ PRENDIAMO $[c_1, b]$

IN ENTRAMBI I CASI CHIAMIAMO IL NUOVO
INTERVALLO $[a_1, b_1]$, SE $f(c_1) = 0$ FINITO!

SAPPIAMO CHE $|b_1 - a_1| = \frac{|b - a|}{2}$ E UNO

ZERO SI TROVA ALL'INTERVALLO QUINDI

NE ABBIAMO INDIVIDUATO UNO CON MAGGIORE

PRECISIONE

POSSIAMO CONTINUARE E PRENDERE

$$c_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad \text{E ANCORA}$$

1) $f(c_2) = 0$ FINITO

2) $f(c_2) > 0 \rightarrow [a_1, c_2]$ $f(a_1) < 0$ $f(c_2) > 0$

3) $f(c_2) < 0 \rightarrow [c_2, b_1]$ $f(c_2) < 0$ $f(b_1) > 0$

CHIAMIAMO IL NUOVO INTERVALLO $[a_2, b_2]$

CHE HA AMPIEZZA $\frac{|b - a|}{4}$ E IN ESSO

SI TROVA UNO ZERO

POSSIAMO CONTINUARE CON QUESTO ALGORITMO

E TROVARE UNO ZERO CON LA PRECISIONE

CHE VUOLIAMO

$$\sin(x) + 2x - 3 = 0 \quad ? \quad [0, \pi]$$

$$\frac{\pi}{4} \quad ? \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2} - 3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 3 < 0$$

QUINDI UNO ZERO È IN $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

DOVREMMO CONSIDERARE IL PUNTO $\frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{3}{8}\pi$

E CALCOLARE $f\left(\frac{3}{8}\pi\right) - \dots$

Th $\exists$ VALORI INTERMEDII

SIA f CONTINUA IN $[a, b]$ / $f \in C([a, b])$

ALLORA f ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI
TRA $f(a)$ e $f(b)$

OVVERO $\forall L \in [f(a), f(b)]$ se $f(a) \leq f(b)$

OPPURE $L \in [f(b), f(a)]$ se $f(a) > f(b)$

$\exists$ ALMENO UN PUNTO x_L t.c. $f(x_L) = L$

QUESTO SIGNIFICA CHE L'IMMAGINE $f([a, b])$

È UN INTERVALLO I E L'INTERVALLO

E SE $f(a) \leq f(b) \Rightarrow [f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$

SE $f(b) < f(a) \Rightarrow [f(b), f(a)] \subseteq f([a, b])$