

$$\sin(x) + 2x - 3 = 0 \quad ? \quad [0, \pi]$$

$$\frac{\pi}{4} \quad ? \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2} - 3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 3 < 0$$

QUINDI UNO ZERO È IN $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

DOVREMMO CONSIDERARE IL PUNTO $\frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{3}{8}\pi$

E CALCOLARE $f\left(\frac{3}{8}\pi\right) - \dots$

Th $\exists$ VALORI INTERMEDII

SIA f CONTINUA IN $[a, b]$ / $f \in C([a, b])$

ALLORA f ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI
TRA $f(a)$ e $f(b)$

OVVERO $\forall L \in [f(a), f(b)]$ se $f(a) \leq f(b)$

OPPURE $L \in [f(b), f(a)]$ se $f(a) > f(b)$

$\exists$ ALMENO UN PUNTO x_L t.c. $f(x_L) = L$

QUESTO SIGNIFICA CHE L'IMMAGINE $f([a, b])$

È UN INTERVALLO I E L'INTERVALLO

E SE $f(a) \leq f(b) \Rightarrow [f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$

SE $f(b) < f(a) \Rightarrow [f(b), f(a)] \subseteq f([a, b])$

DIM SIA $f(a) < f(b)$ $L \in (f(a), f(b))$

PRENDIAMO LA FUNZIONE $g_L(x) = f(x) - L$ QUESTA
E' CONTINUA IN $[a, b]$ E TALE CHE

$$g_L(a) = f(a) - L < 0, \quad g_L(b) = f(b) - L > 0 \Rightarrow$$

$$\exists x_c \text{ t.c. } g(x_c) = 0 \Rightarrow f(x_c) - L = 0 \Rightarrow$$

$$f(x_c) = L$$

UNA IMPORTANTE APPLICAZIONE

TH SIA f CONTINUA SU UN INTERVALLO

I ALLORA f E' INIETTIVA E QUINDI

INVERTIBILE $\Leftrightarrow f$ E' STRETTAMENTE

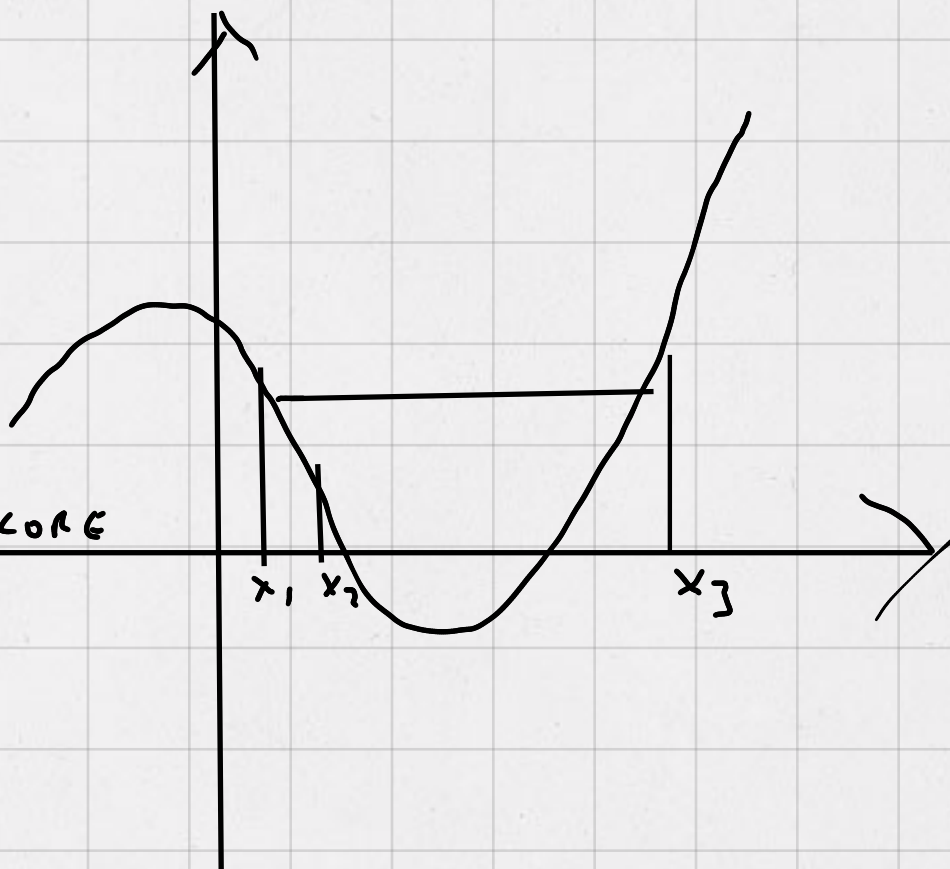
MONOTONA

$$\exists s \quad f(x_1) > f(x_2)$$

$$f(x_2) < f(x_3)$$

$\exists$ PUNTI IN CUI

f ASSUME LO STESSO VALORE



SE f NON È DEFINITA SU UN

INTERVALLO IL RISULTATO È FALSO

ES $f(x) = \frac{1}{x}$ È INIETTIVA MA NON
È MONOTONA

Th SIA f UNA FUNZIONE CONTINUA E INVERTIBILE
IN UN INTERVALLO $I \Rightarrow \exists f^{-1}$ E TALE FUNZIONE
È ANCHESSA CONTINUA SU $f(I)$

$f(x) = \arcsin(x)$ CONTINUA SU $[-1, 1]$

$f(x) = \arccos(x)$ - - - - -

$f(x) = \arctan(x)$ $\mathbb{R}$

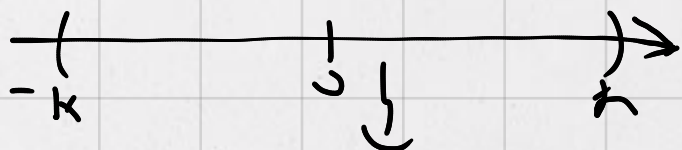
Th 0, WEIERSTRASS

PRIMA DELL'ENUNCIATO

SIA $A \subseteq \mathbb{R}$, A SI DICE LIMITATO

SE ESISTE UNA COSTANTE k t.c.

$$|x| \leq k \quad \forall x \in A$$



A SI TROVA TUTTO

$\bar{x}$ E' IL MASSIMO DI A SE

$$\bar{x} \in A$$

$$x \leq \bar{x} \quad \forall x \in A$$

ANALOGAMENTE $\underline{x}$ E' IL MINIMO DI A SE

$$\underline{x} \in A$$

$$x \geq \underline{x} \quad \forall x \in A$$

IN GENERALE UN INSIEME A NON POSSIENE
MAX E MIN

ESEMPIO $(0,1)$ $\nexists$ MINIMO NE MASSIMO

$[0,3)$ POSSIENE MIN $x=0$ MA NON

POSSIENE MASSIMO

QUELLO CHE SI PUO' DEFINIRE SU OGNI
INSIEME REALE LIMITATO E' IL COUPLETTA
DI ESTREMO SUPERIORE ED ESTREMO INFERIORE
CHE $\exists$ SEMPRE E COLLEGATO CON IL MAX
E IL MINIMO SOLO SE QUESTI ESISTONO

$A = (0, 1)$ 0 e' $\inf(A)$ ESTREMO INFERIORE
1 e' $\sup(A)$ ESTREMO SUPERIORE

$\inf$ e' PER DEFINIZIONE IL MAX DELL'
INSIEME DEI MINORANTI, OVVERO L'INSIEME

$$B = \{ y \in \mathbb{R} \text{ t.c. } y \leq x \quad \forall x \in A \}$$

QUESTO ESISTE GRAZIE AGLI ASSIOMI
DI $\mathbb{R}$!

ANALOGAMENTE $\sup(A)$ e' IL MINIMO
DELL' INSIEME DEI MAGGIORANTI C

$$C = \{ y \in \mathbb{R} : y \geq x \quad \forall x \in A \}$$

SE ABBIAMO $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

DIREMO CHE f È LIMITATA SE L'INSIEME
IMMAGINE $f(A)$ È LIMITATO

$\max_A f$ SE ESISTE CORRISPONDE AL $\max(f(A))$

$\min_A f$ - - - - - $\min(f(A))$

MENTRE $\inf_A f = \inf(f(A))$ E

$\sup_A f = \sup(f(A))$

QUINDI $\inf_A f$ E $\sup_A f$ ESISTONO SEMPRE

SE f È LIMITATA

SE f NON È LIMITATA SI POSSONO

CONSIDERARE UGUALI A $-\infty$ O $+\infty$

PIÙ PRECISAMENTE $\inf(f(A)) = -\infty$ SE $f(A)$

NON HA MINORANTI E $\sup(f(A)) = +\infty$ SE

$f(A)$ NON HA MAGGIORANTI

OSSERVAZIONE DIRE CHE $\exists \max_A f$

SIGNIFICA DIRE CHE $\exists$ ALMENO UN PUNTO

x_n IN A T.C. $f(x_n) \geq f(x) \quad \forall x \in A$

ANALOGAMENTE DIRE CHE $\exists \min_A f$
SIGNIFICA CHE $\exists$ ALMENO UN PUNTO $x_m \in A$
t.c. $f(x_m) \leq f(x) \forall x \in A$

Th DI WEIERSTRASS SIA f CONTINUA
IN $[a, b]$. ALLORA $\exists_{\text{no}} \max_{[a, b]} f = M \in$

$\min_{[a, b]} f = m$ OVVERO ESISTONO ALMENO 2 PUNTI

$x_m, x_M \in [a, b]$ t.c. $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$

$\forall x \in [a, b]$

$\Leftarrow f(x) = \sqrt{x^2+3} + \cos(x^2) - 6x$

AMMETTE MAX E MIN IN $[0, 1]$

SE f NON E' CONTINUA O NON E'

SU UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO

IN GENERALE IL RISULTATO E' FALSO

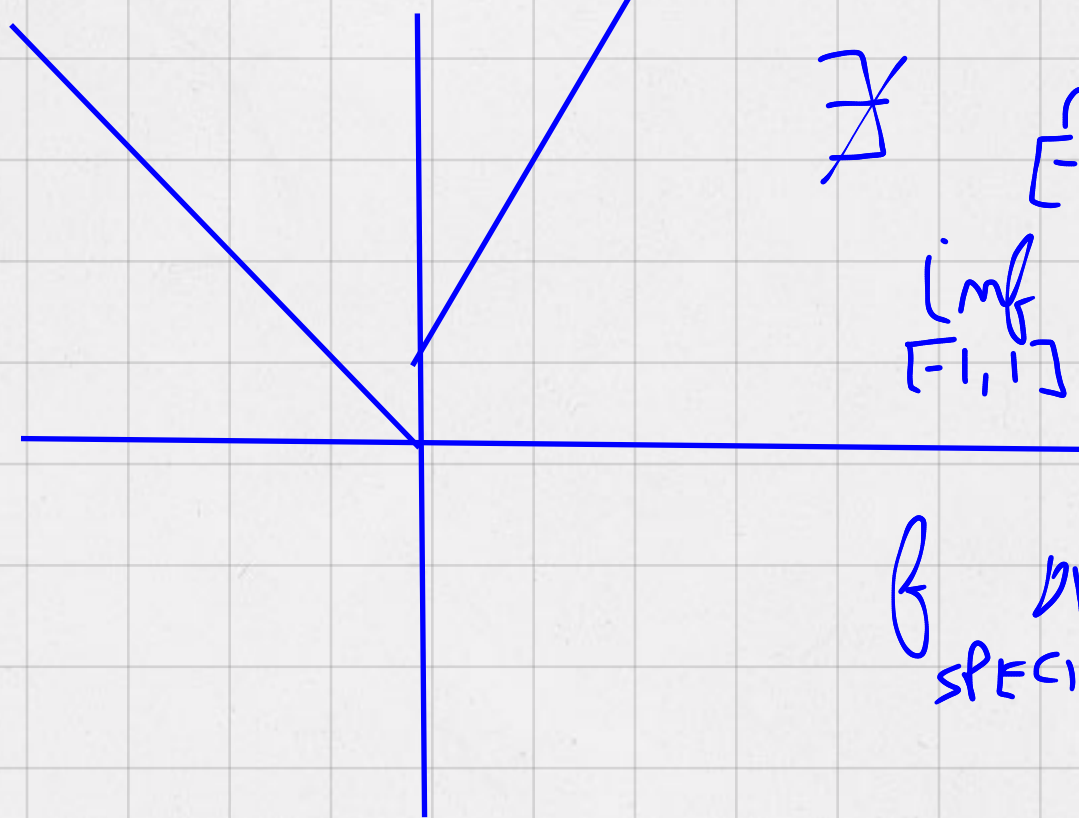
ES $f(x) = x$ in $(0,1)$ NON

AMMETTE MAX E MIN INFATTI

$f((0,1)) = (0,1) \rightarrow$ NO MAX, NO MIN

$$\inf_{(0,1)} f = 0, \quad \sup_{(0,1)} f = 1$$

ES $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases} \quad [-1,1]$



$\nexists \min_{[-1,1]} f$

$$\inf_{[-1,1]} f = 0$$

f DISCONTINUA "I° SPECIE" in $x=0$

ES ① $A = (0, 1) \cup [7, 9]$

$\inf A$ $\sup A$? $\exists \max A$ e $\min A$?

② $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$ DETERMINARE $\max$ e $\min$
di f in $[1, 2]$

③ SIA $f(x) = \sin(x) + x$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$

DETERMINARE LA SUA IMMAGINE, DIRE
 $\exists$ L'INVERSA E SE ESSA È UNA FUNZ.
CONTINUA

④ SIA $f(x) = x^3 + 2x - 2$ DETERMINARE UN
INTERVALLO DI AMPIEZZA $\leq \frac{1}{4}$ IN CUI
 f AMMETTE UNO ZERO

② $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$ DETERMINE MAX & MIN

on f on $[1, 2]$

$\frac{1}{x}$ on $\mathbb{R}^+$ on $[1, 2]$ $\Rightarrow f$ on $\mathbb{R}^+$ on $[1, 2]$
 $-x^2$ on $\mathbb{R}$ on $[1, 2]$

$\Rightarrow$ MAX & MIN of f on $[1, 2]$

WILHELM STRASS $m = f(2) = \frac{1}{4} - 4 = -\frac{7}{4}$

$$M = f(1) = 0$$

③ SIA $f(x) = \sin(x) + x$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$

DETERMINARE LA SUA IMMAGINE, DIRE
 $\exists$ L'INVERSA E SE ESSA È UNA FUNZ.
 CONTINUA

f È CONTINUA E CRESCENTE IN
 QUANTO $\sin(x)$ È CRESC. IN $[0, \frac{\pi}{2}]$
 QUINDI È SOMMA DI FUNZ. CONTINUE

USANDO IL TH DI ESISTENZA DEI VALORI
 INTERMEDI E IL TH DI WEIERSTRASS ABBIAMO

CHÈ $f([0, \frac{\pi}{2}]) = [m, M]$, $m = \min_{[0, \frac{\pi}{2}]} f$
 $M = \max_{[0, \frac{\pi}{2}]} f$ PERCHÉ f CRESC. $\Rightarrow m = f(0) = 0$

$M = f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Im } f = [0, 1 + \frac{\pi}{2}] \rightarrow$

$\exists f^{-1}: [0, 1 + \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ È ANCH'ESSA

CRESCENTE E CONTINUA

④ SIA $f(x) = x^3 + 2x - 2$ DETERMINARE UN
INTERVALLO DI AMPIEZZA $\leq \frac{1}{4}$ IN CUI

f AMMETTI UNO ZERO

$$f(0) = -2 \quad f(1) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 - 2 < 0$$

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad \frac{3}{4}$$
$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{3}{2} - 2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 - \frac{1}{2} = \frac{27 - 16}{64} = \frac{11}{64}$$

LO ZERO SI TROVA IN $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$

DIMOSTRARE CHE L'EQUAZIONE

$$x^2 - 4|\sin(x)| = 0 \quad \text{AMMETTE ALMENO 3}$$

SOLUZIONI

$f(x) = x^2 - 4|\sin(x)|$ È CONTINUA E PARI IN

$\mathbb{R}$

OSSERVIAMO $f(0) = 0$, SE TROVIAMO x_1 SOLUZ.

IN $(0, \infty)$ ALLORA ANCHE $-x_1$ È SOLUZ.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, QUINDI LA FUNZ.

DIVENTA POSITIVA PER x ABBASTANZA GRANDE

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 4 < 0 \quad (\pi^2 < 16)$$

$$\Rightarrow \exists x_1, t.c. f(x_1) = 0$$