

DETERMINARE MAX E MIN ASSOLUTI

IN INTERVALLO $[a, b]$ DI f CONTINUA

OSSERVAZIONI

1) PER IL TH DI WEIERSTRASS ESISTONO!

2) SE SONO PUNTI DI MAX O MIN ASSOLUTI
E SONO ASSUNTI ALL'INTERNO DI (a, b)

SONO ANCHE PUNTI DI MAX E MIN RELAT.

QVINDI SE x_0 E' PUNTO DI MAX O MIN
RELATIVO $x_0 \in (a, b)$ E IN ESSO $\exists f'(x_0)$!

NECESSARIAMENTE $f'(x_0) = 0$

3) SE x_0 E' UN PUNTO DI MAX O MIN
RELATIVO MA IN ESSO $\nexists f'(x_0)$ ALLORA
NON POSSIAMO DIRE NULLA

METTENDO INSIEME A QUESTE OSSERVAZIONI
DEDUCHIAMO CHE PER DETERMINARE MAX E
MIN ASSOLUTI DI f CONTINUA IN $[a, b]$
DOBBIAMO CONSIDERARE

- i) GLI ESTREMI a e b E VUOI
CALCOLARE $f(a)$ e $f(b)$
- ii) DETERMINARE, SE CI SONO, TUTTI I
PUNTI INTERNI AD (a, b) IN CUI $\exists f'(x)$
ED E' NULLA, PUNTI STAZIONARI, IN ESSI
CALCOLIAMO L'IMMAGINE
- iii) DETERMINARE, SE CI SONO, TUTTI I
PUNTI INTERNI AD (a, b) IN CUI
 $\nexists f'(x)$, IN ESSI CALCOLIAMO
L'IMMAGINE

CONFRONTANDO I VALORI OTTENUTI IN
i), ii) e iii) DETERMINEREMO MAX E MIN
ASSOLUTI

ESER $f(x) = \sin^3(x) - \cos(x)$ MAX E MIN
IN $[0, \pi]$?

i) $f(0) = -1$ $f(\pi) = 1$

ii) f DERIVABILE IN $(0, \pi)$ E

$$f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) + \sin(x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2\cos(x) + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = 0 \quad \vee \quad 2\cos(x) + 1 = 0$$

$(0, \pi)$

$$x = 0$$

$$x = \pi$$

$$\cos(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{2}{3}\pi \quad f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

DEDUCIAMO $\text{MAX} = f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{5}{4}$

$$\text{MIN} = f(0) = -1$$

$$\text{ESER } f(x) = x^2 + |x| + 2x - 1$$

$$x \in [-2, 2]$$

$$f(-2) = 4 + 2 - 4 - 1 = 1$$

$$f(2) = 4 + 2 + 4 - 1 = 9$$

f DERIVABILE IN $(-2, 2) \setminus \{0\}$

$$f'(x) = 2x + \operatorname{sgn}(x) + 2 \quad \frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sgn}(x)$$

$$x > 0 \quad f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ NO!}$$

$$x < 0 \quad f'(x) = 2x - 1 + 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ OK! } f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{4}$$

IN $x=0$ LA FUNZ. NON E' DERIVABILE
PER CUI VA CONSIDERATO QUESTO PUNTO!

$$f(0) = -1$$

ABBIAMO $-\frac{5}{4}$ MINIMO DI f IN $[-2, 2]$
9 MASSIMO DI f IN $[-2, 2]$

PROP SIANO f, g CONTINUE IN $[a, b]$
DERIVABLE IN (a, b)

$$\exists c \in (a, b) \quad f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

OSS Se $f(x) = x \Rightarrow$ TH DI LAGRANGE

$$f'(c) = 1 \quad \forall c. \quad g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad f(b) = b \quad f(a) = a$$

D/M $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$

h CONTINUA IN $[a, b]$

h DERIV. IN (a, b)

$$h(a) = f(a)g(b) - \cancel{f(a)g(a)} - g(a)f(b) + \cancel{g(a)f(a)}$$

$$h(b) = \cancel{f(b)g(b)} - f(b)g(a) - \cancel{g(b)f(b)} + g(b)f(a)$$

$$\Rightarrow h(a) = h(b) \rightarrow \text{TH DI ROLLE}$$

$$\exists c \in (a, b) \quad h'(c) = 0$$

$$h'(x) = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)]$$

DA CUI LA TESI

$$\underline{0/0} \quad \text{SE} \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow \text{(TH DI ROLLE)} \quad g(b) \neq g(a)$$

LA PRECEDENTE UGUAGLIANZA SI PUO' SCRIVERE
IN QUESTO CASO COME:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

QUESTA E' MOLTO UTILE PER DIMOSTRARE
IL TH DI DE L'HOPITAL

VERSIONE FACILE

SIA f CONTINUA E DERIVABILE IN (x_0, b)

- - - g - - - E DERIVABILE IN (x_0, b) $g'(x) \neq 0$ IN (a, b)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0$$

ALLORA SE $\exists$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

LO STESSO RISULTATO SI PUO' GENERALIZZ.

AL CASO IN CUI STA

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \quad \text{E' VERBA}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \quad \text{UNA FORMA}$$

INDETERMINATA $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

OVVERO AL CASO IN CUI SIA f CHE g

TENDANO ENTRAMBE A 0 o ∞

NB SE $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ QUESTO NON

SIGNIFICA CHE $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

UN'ALTRA CONSEGUEZZA IMPORTANTE DEL

PRECEDENTE RISULTATO E' CHE SE SCEGLIAMO

$g(x) = x - x_0$ OTTENIAMO CHE SE $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{1} =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ E SI HA CHE

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ OVVERO SE $\exists$ FINITO

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists f'(x_0) = l$$

INFATTI PER DEFINIZIONE $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

ATTENZIONE ANCHE IN QUESTO CASO SE

$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ QUESTO NON SIGNIFICA CHE

LA FUNZ. NON È DERIVABILE IN x_0 , MENTRE

SE $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = +\infty (-\infty)$ ALLORA POSSIAMO

DIRE CHE $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty (-\infty) \Rightarrow f$ NON

DERIVABILE IN x_0

ESEMPIO $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ CONTINUA IN } x = 0$$

f DERIVABILE IN $x = 0$?

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) \quad \forall x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = ? \quad \nexists$$

MA

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

$\Rightarrow \exists f'(0)$ E VALE 0!

D/M DI DE L'HOPITAL (CASO SEMPLICE)

SE $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) \Rightarrow$ CHE POSSIAMO
PORRE $f(x) = g(x) = 0$ E LE FUNZIONI RISULTERANNO

CONTINUE IN OGNI INSIEME $[x_0, x]$ $x_0 < x < b$

INOLTRE SARANNO DERIVABILI IN (x_0, x)

QUINDI $\exists c \in (x_0, x)$ t.c.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \rightarrow f(x_0) = g(x_0) = 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{PERCIO' SE } \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\text{ABBIAMO CHE } \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

INFATTI $c \in (x_0, x)$ QUINDI USANDO LA

DEFINIZIONE DI LIMITE SEGUE SUBITO LA TESI

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1} \quad \frac{0}{0}$$

$\sqrt{x-1}$ e x^2-1 sono
DERIVABILI IN
(1, ∞)

CALCOLO

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x-1})'}{(x^2-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{2x} = +\infty$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}$$

L'HOPITAL

POSSIAMO PROVARE AD APPLICARE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - 1}{2x}$$

ANCORA $\frac{0}{0}$ APPLICHIAMO

DI NUOVO $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0 \rightarrow$ TORNAINDO INDIETRO

AVREMO $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3+1} + x}{x^2 + \sqrt{x}}$$

CONVIENE L'HOPITAL? E' $\frac{\infty}{\infty}$

SE APPLICHIAMO L'HOPITAL. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} + 1}{2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}} =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^2 + 2\sqrt{x^3+1}) \sqrt{x}}{(4x\sqrt{x} + 1) \sqrt{x^3+1}}$$

ANCORA PIU' COMPLICATO

È RA PIU' SEMPLICE CON IL CONFRONTO DI WFL/11)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{x^2 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right]}{x^2 \left[1 + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right]}{\left[1 + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right]} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sin\left(\frac{x}{4} - 1\right)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{4} \cos\left(\frac{x}{4} - 1\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sin\left(\frac{x}{4} - 1\right)} = 1$$

ATTENTION !!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^3+1} = ? \quad \text{now it's } \frac{0}{0} !!$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^3+1} = -2 \quad \text{SE USIAMO HOPITAL PER}$$

ERRORE $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x^2} = +\infty$

FUNZIONE ESPOENZIALE

PER OGNI $Q > 0$ ABBIAMO DEFINITO

Q^r CON r RAZIONALE

ABBIAMO ANCHE VISTO CHE LA FUNZ.

x^r È UNA FUNZ. DERIV. $\forall x > 0$

$$\text{E } (x^r)' = r x^{r-1}$$

ORA VOGLIAMO DEFINIRE LA FUNZIONE

Q^x OVERTO FISSARE Q E LASCIARE

x COME VARIABILE, PER FAR QUESTO

DOBBIAMO DAR SENSO AL VALORE Q^x

QUANDO $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, UN'IDEA POTREBBE
ESSERE QUELLA DI USARE IL FATTO CHE I
RAZIONALI "APPROSSIMANO" BENE QUANTO VOGLIAMO

OGNI VALORE REALE, PER CUI AD ESEMPIO

$2^\pi \sim 2^{3,1415}$ PIÙ CIFRE SCEGLIAMO È MEGLIO

"APPROSSIMARE" IL NOSTRO NUMERO 2^π

PER DARE UNA DEFINIZIONE PRECISA DOVREMMO
USARE L'ASSIOMA DI DEDEKIND (ELEMENTO SEPARATORE)
NON SEGUIREMO QUESTA STRADA MA UNA
PIÙ COSTRUTTIVA

QUELLO CHE VOGLIAMO È CHE LA FUNZ.
 Q^x RISPETTI LE PROPRIETÀ CHE SI HANNO
QUANDO x È RAZIONALE, OVVERO

$$i) Q^0 = 1 \quad ii) Q^x \cdot Q^y = Q^{x+y} \quad iii) Q^{-x} = \frac{1}{Q^x}$$

$$iv) (Q^x)^y = Q^{xy} \quad v) Q^x \cdot b^x = (Qb)^x \quad x, y \text{ RAZIONALI}$$

SONO VERE!

UN'ALTRA PROPRIETÀ CHE CI ASPETTIAMO
È CHE VACE SU I RAZIONALI È CHE
 $Q > 1$ Q^x È CRESC È POSITIVA

$0 < Q < 1$ Q^x È DECRE. È POSITIVA

$Q = 1$ È COSTANTE $1^x = 1$

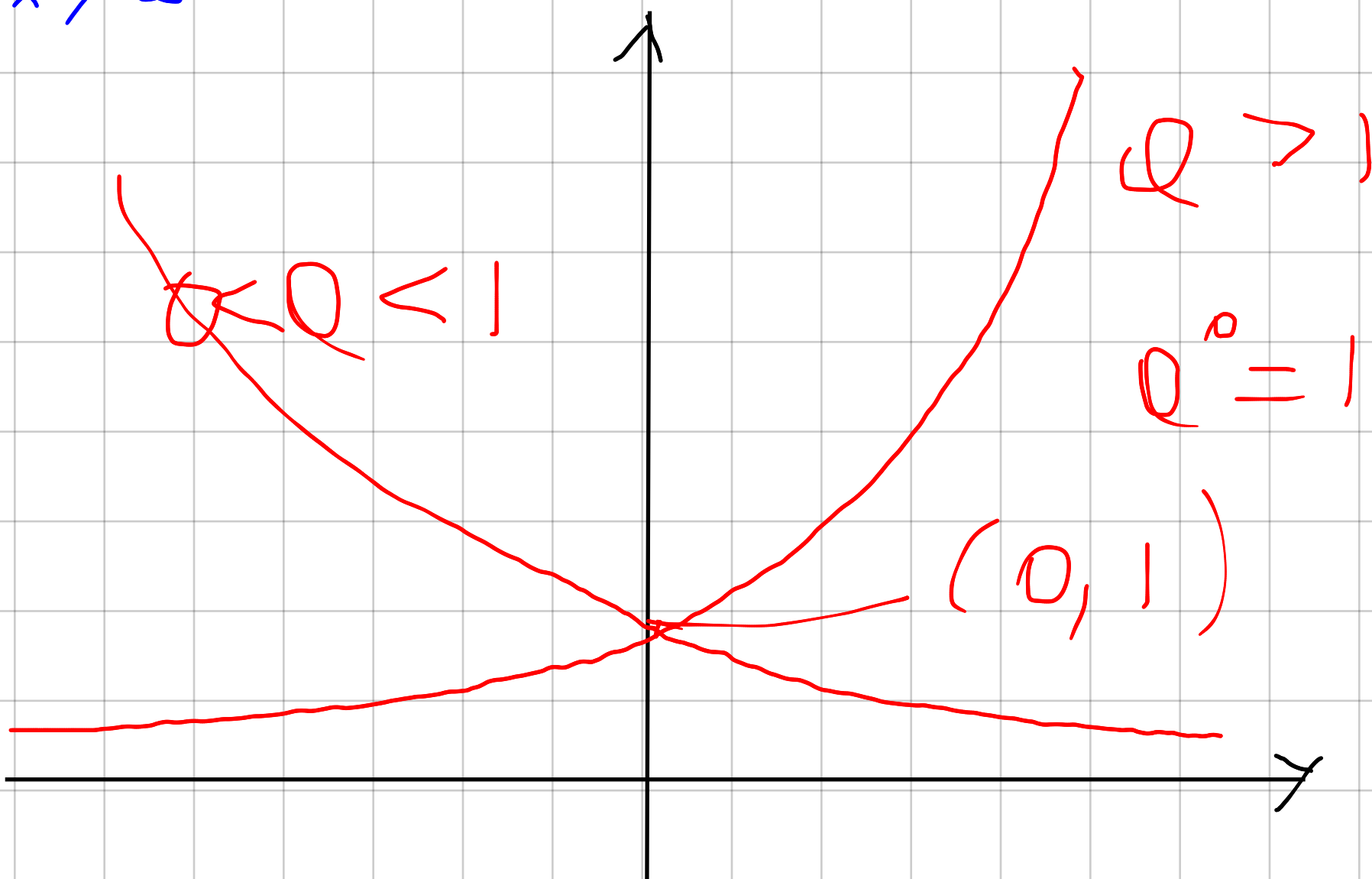
INOLTRE CI ASPETTIAMO CHE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Q^x = +\infty \quad Q > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} Q^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Q^x = 0 \quad 0 < Q < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} Q^x = +\infty$$



IN QUESTO MODO SARÀ DEFINITA $\forall a > 0$
 $a \neq 1$ L'INVERSA DELLA FUNZ. a^x (STAT.

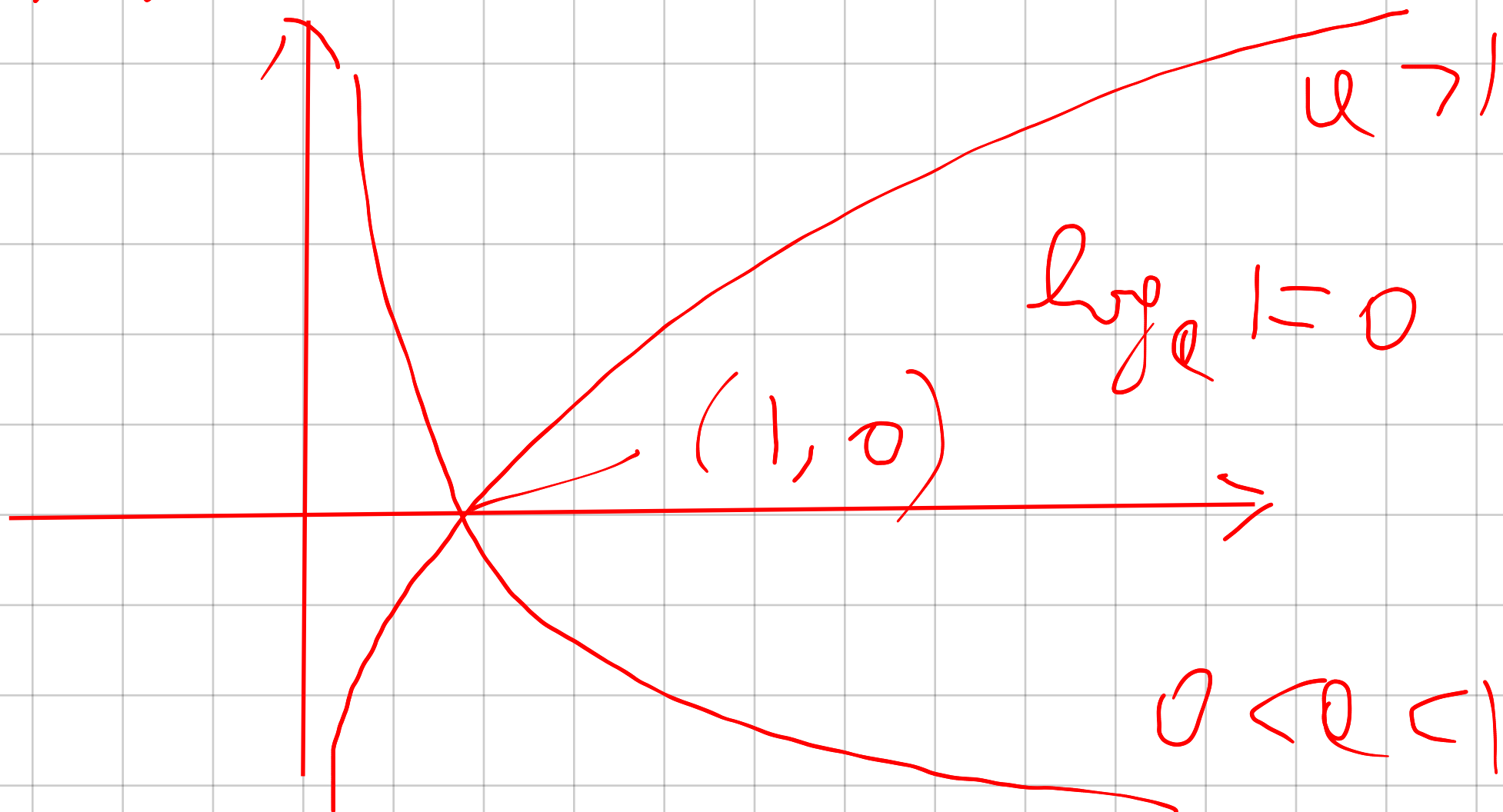
MONOTONA E QUINDI INVERTIBILE)

INDICHIAMO L'INVERSA COME $\log_a(x)$ E
 SI LEGGE LOGARITMO IN BASE a DI x

QUINDI PER DEFINIZIONE

$\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\begin{cases} \text{CRES} & \text{SE } a > 1 \\ \text{DECR} & \text{SE } 0 < a < 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \log_a x = y \quad \forall x > 0 \\ & \downarrow \\ & y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x \end{aligned}$$



PROPRIETÀ

$$i) \log_e 1 = 0 \quad ii) \log_e(xy) = \log_e(x) + \log_e(y)$$

$$iii) \log_e\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \left[\log_e\left(\frac{x}{y}\right) = \log_e(x) - \log_e(y) \right]$$

$$iv) \log_e(x^y) = y \log_e(x)$$

$$v) \log_e x = \frac{\log_b x}{\log_b e}$$

$$[e, b > 0]$$

ESEMPIO

$$i) \quad \begin{aligned} e^{\log_e(xy)} &= xy \\ e^{\log_e(x) + \log_e(y)} &= e^{\log_e(x)} \cdot e^{\log_e(y)} = x \cdot y \end{aligned}$$

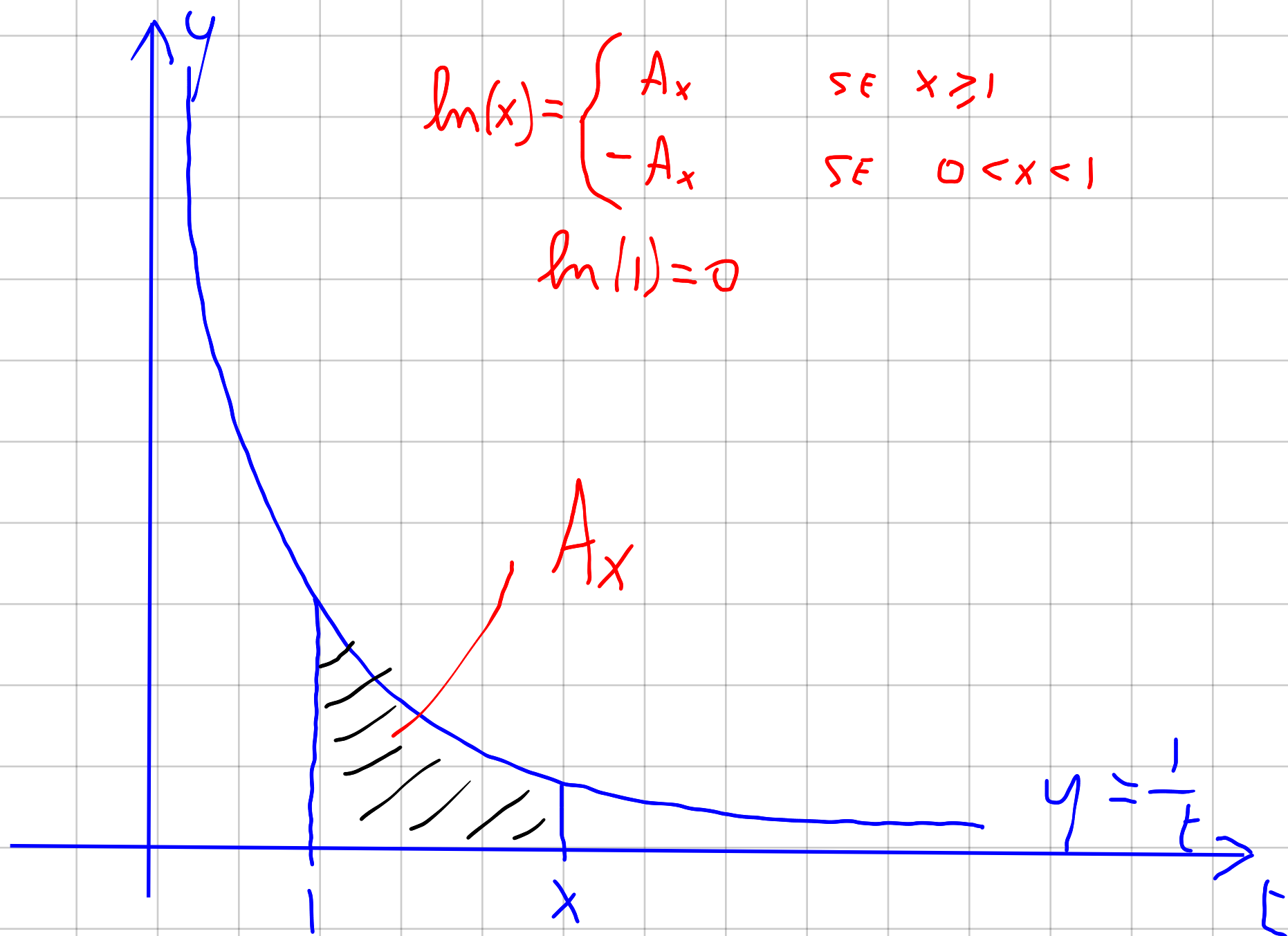
$\Rightarrow ii)$

$$v) \quad b^{\log_b(e) \cdot \log_e(x)} = [b^{\log_b(e)}]^{\log_e(x)} = e^{\log_e(x)} = x$$

$$b^{\log_b(x)} = x \Rightarrow \log_b(x) = \log_b(e) \log_e(x) \rightarrow v)$$

DEFINIZIONE COSTRUTTIVA

LOGARITMO NATURALE $\ln(x)$ A PRIORI NON
HA A CHE FARE CON QUANTO DETTO PRIMA
SIA $f(t) = \frac{1}{t}$
 A_x E' L'AREA DI PIANO DELIMITATA DALLA
CURVA $y = \frac{1}{t}$ LE RETTE VERTICALI $t=1$ $t=x$
E L'ASSE DELLE t



$$\ln(x) = \begin{cases} A_x & \text{SE } x \geq 1 \\ -A_x & \text{SE } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\ln(1) = 0$$

quindi $\ln(x) > 0$ se $x > 1$
 $\ln(x) < 0$ se $0 < x < 1$

DIMOSTRIAMO CHE $\ln(x)$ E' DERIVABILE E

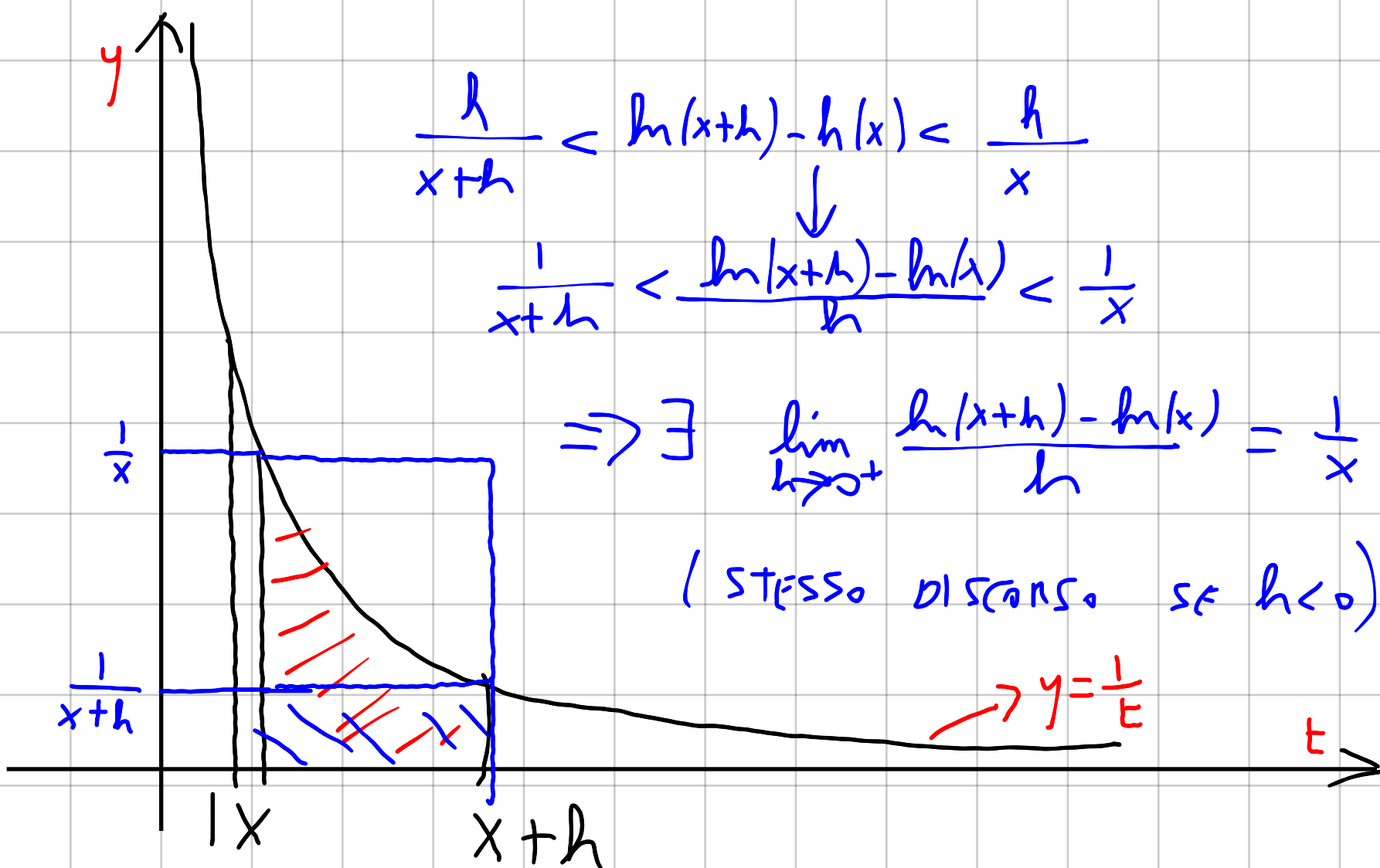
$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$$

DOBBIAMO FARE

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

$\ln(x+h) - \ln(x)$ se $h > 0$ E' L'AREA DELIMITATA

DA $t=x$ $t=x+h$ $y=\frac{1}{t}$ E L'ASSE $y=0$



LE PROPRIETA' $\ln(1)=0$ E $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$

CARATTERIZZANO $\ln(x)$

INFATTI $\ln(x)$ VERIFICA

$$i) \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad ii) \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

$$\Downarrow \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$iii) \ln(x^n) = n \ln(x) \quad \forall n \in \mathbb{Q}$$

$$i) \frac{d}{dx} [\ln(xy)] = \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} [\ln(x) + \ln(y)] = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) + C \quad (\text{COROLLARIO LAFRANGE})$$

MA SE $x=1$ OTTENIAMO

$$C = 0 \quad \text{PER CUI}$$

VALGONO L'IDENTITA'

ANALOGAMENTE

$$\frac{d}{dx} \ln(x^n) = \frac{n x^{n-1}}{x^n} = \frac{n}{x}$$

$$\frac{d}{dx} (n \ln(x)) = \frac{n}{x} \quad \text{ANCORA}$$

$$\ln(x^n) = n \ln(x) + C$$

OTTENIAMO

$$C = 0$$

MA PER $x=1$

$$\boxed{\ln(1)=0!}$$

1. PARTI COCARE

$\ln(z^n) = n \ln(z)$ PER CUI POSSIAMO DEDURRE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{E}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\ln(y) = -\infty$$

CHE LEGAME C'È TRA QUESTA DEFINIZIONE DI LOGARITMO E QUELLO DI CUI ABBIAMO PARLATO PRIMA?

$\ln(x): (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ CRISI INVERTIBILE $\exists$

L'INVERSA CHE CHIAMIAMO $\exp(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Im $\exp(x) = (0, \infty)$ $\exp(0) = 1$ INFATTI $\log(1) = 0$

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow \ln(y) = x$$

$$\ln(\exp(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(\ln(y)) = y \quad \forall y > 0$$

PROPRIETA' DI $\exp(x)$

$$i) [\exp(x)]^r = \exp(rx) \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

$$ii) \exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$$

$$iii) \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \rightarrow \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

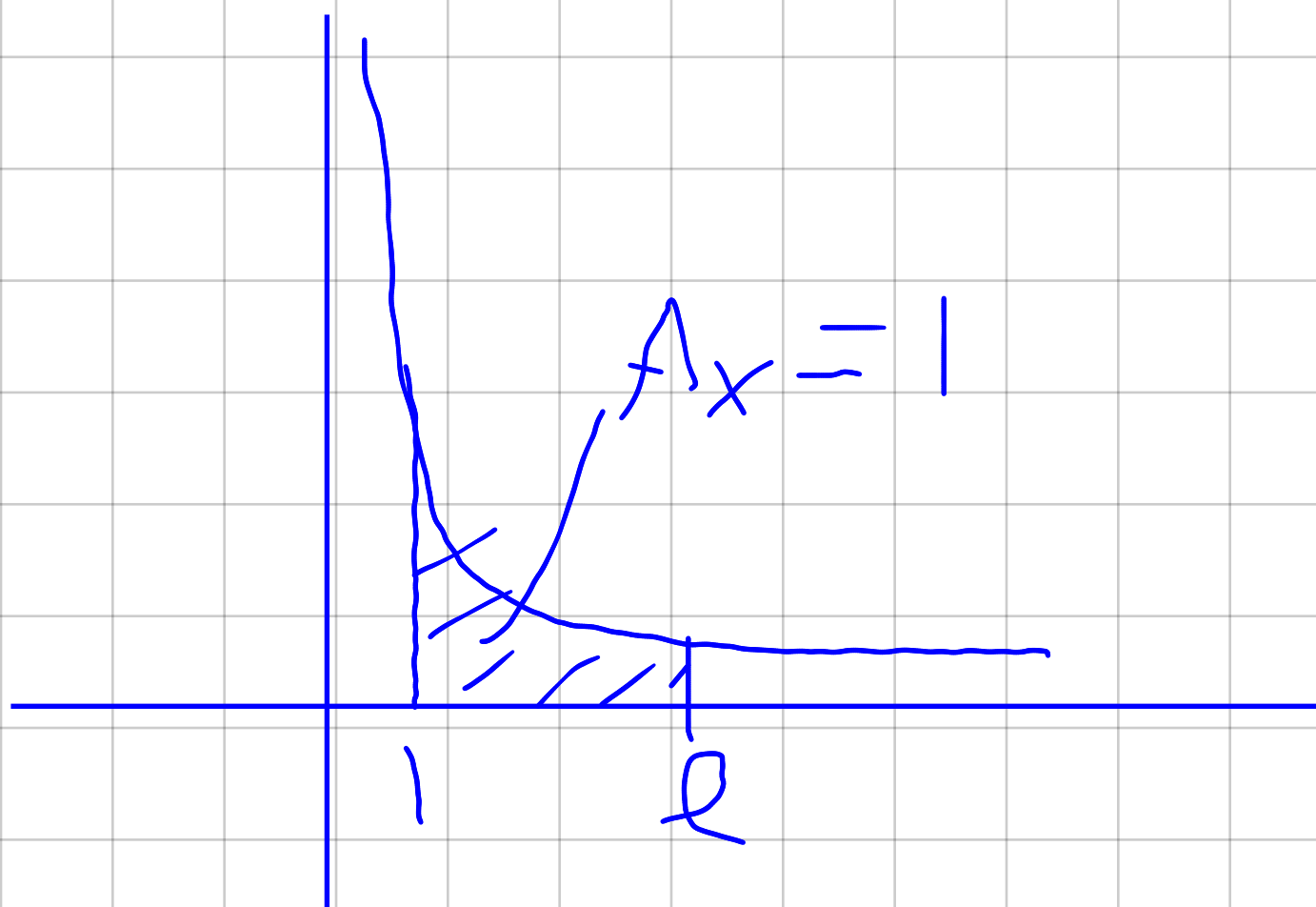
CONSEGUENZA DI QUELLE PER $\log(x)$ ESEMPIO

$$i) \log([\exp(x)]^r) = r \log(\exp(x)) = rx, \quad \log(\exp(rx)) = rx$$

ORA DEFINIAMO $e = \exp(1)$

IL NUMERO e È QUEL NUMERO TALE CHE

$\ln(e) = 1$ OVVERO IL NUMERO TALE CHE



$$\text{OVVERO } \exp(\pi \cdot 1) = \exp(1)^\pi = e^\pi$$

PER CUI $\exp(x)$ È LA NATURALE ESTENSIONE

DI e^x PER $x \in \mathbb{R}$ INFATTI COINCIDE CON e^x SU I

RAZIONALI È CONTINUA E DERIVABILE (INVERSA DI FUNZ
CONTINUA E DERIVABILE)

$e = 2,718281828459\dots$ NUMERO DI NEPERO NON È

RAZIONALE

Q^x per $Q \neq 1$.

$$\ln(Q^r) = r \ln(Q) \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

$$\text{DA CUI } Q^r = e^{r \ln(Q)}$$

IN QUESTO MODO ABBIAMO $Q^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}$

DA CUI IN MODO NATURALE DEFINIAMO $Q^x = e^{x \ln(Q)}$

OSSERVIAMO A QUESTO PUNTO CHE NECESSARIAMENTE

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

MENTRE L'INVERSA DI Q^x

È PROPRIO $\log_e(x)$

$$\frac{d}{dx} e^x = ? \quad \text{DERIVATA} \quad \text{DELL' INVERSA}$$

$$e^x = y \Leftrightarrow \ln(y) = x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

$$\frac{d}{dy} \ln(y) = \frac{1}{y}$$

LA FUNZIONE e^x HA LE PROPRIETÀ DI AVERE DERIVATA CHE COINCIDE CON ESSA

OSS SE $f'(x) = f(x)$ NECESS. $f(x) = c e^x$

INFATTI $[f(x)e^{-x}]' = f(x)e^{-x} + f'(x)(-e^{-x}) = f(x)e^{-x} - f'(x)e^{-x} \equiv 0$
 $\Rightarrow$ LAGRANGE $f(x)e^{-x} = c \Rightarrow f(x) = c e^x$!

POSSIAMO DEFINIRE ORA $f(x)^{g(x)}$ SE $f(x) > 0$

QUESTA SARA' $e^{g(x)\ln(f(x))}$

PER CUI SE f E' DERIVABILE E g E' DERIV.

ALLORA ANCHE $f(x)^{g(x)}$ SARA' DERIVABILE E AVREMO

$$[f(x)^{g(x)}]' = \left[e^{g(x)\ln(f(x))} \right]' = e^{g(x)\ln(f(x))} [g(x)\ln(f(x))]'$$

$$= f(x)^{g(x)} \left(g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \right)$$

x^x

DEFINIZIONE

PER $x > 0$

$$x^x = e^{x \ln(x)}$$

$$(x^x)' = e^{x \ln(x)} \left(\ln(x) + \frac{x}{x} \right) = x^x (\ln(x) + 1)$$

$$\frac{d}{dx} (\log_e(x)) = ? \quad \log_e(x) \text{ È L'INVERSA DI } e^x \text{ PER}$$

$$\text{CU } [\log_e(x)]' = \left[\frac{1}{e^y} \right]' =$$

$$y = \log_e(x)$$

$$= \frac{1}{\ln(e) e^y} = \frac{1}{\log(e) e^{\log_e(x)}} = \frac{1}{\log(e) x}$$

$$\text{IN EFFETTI } \log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)}$$

ABBIAMO DETTO CHE $\forall e > 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} ? \quad \frac{\infty}{\infty}$$

HOPITAL!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e) e^x}{1} = +\infty$$

 e^x TENDE A $+\infty$ PIU' VELOCEMENTEDI $x!$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} ?$$

DI NUOVO HOPITAL (2 VOLTE)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e) e^x}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(e) e^x}{2} = +\infty$$

NELLO STESSO MODO POSSIAMO DIMOSTRARE CHE $\forall e > 1$

$$n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

 e^x TENDE A $+\infty$ PIU' VELOCEMENTE DI OGNI

POLINOMIO

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{HOPITAL.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \quad \ln(x) \text{ TENDE PIU' LENTAMENTE DI } x$$

PER OGNI $\alpha \in \mathbb{R}$ POSSIAMO DEFINIRE LA FUNZ.

$$x^\alpha, \quad (x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln(x)})' = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

IN QUESTO MODO USANDO HOPITAL DIMOSTRIAMO CHE

$$\forall \alpha > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\alpha} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_e(x)}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)$$

$$\alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x) \quad 0 \cdot \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}$$

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(y)}{y^\alpha}$$

$$= 0$$

$$\text{LO STESSO E' VERO } \forall \alpha > 0, \alpha \neq 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log_e(x) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = ?$ In questo caso possiamo usare HOPITAL.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

CALCOLARE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin(x) - 1}{x^2 + \ln(1+x^2)} \quad \frac{0}{0}$$

HOPITAL.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x)}{2x + \frac{2x}{1+x^2}} \quad \frac{0}{0} \quad \text{di nuovo}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x)}{2 + \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}} = \frac{1}{4}$$

Dimostrare che

$$e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^x - 1 - x \quad f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow$$

$x > 0$ per cui f decresce in $(-\infty, 0)$ e cresce in

$(0, \infty)$ Allora necessariamente in $x=0$ c'è

il minimo assoluto di f , poiché $f(0) = 0$

$$\Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$Q^x \geq c \quad ? \quad c \leq 0 \text{ SEMPRE}$$

$$c > 0 \quad Q > 1 \quad Q^x \text{ CRESCENTE} \quad \forall x \geq 0$$

$$Q^x \geq c \Leftrightarrow x \geq \log_Q(c)$$

$$0 < Q < 1 \quad Q^x \text{ DECRESCENTE} \quad \forall x \geq 0$$

$$Q^x \geq c \Leftrightarrow x \leq \log_Q(c)$$

$$\text{DIMOSTRARE CHE } Q^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \forall x \geq 0$$

$$f(x) = Q^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$$

$$f'(x) = Q^x - 1 - x \quad \text{DALL'ESERCIZIO PRECEDENTE}$$

$$\text{SAPPIAMO CHE } f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{PER CUI}$$

$$f \text{ è CRESCENTE, POICHÉ } f(0) = 0 \Rightarrow$$

$$f(x) \geq f(0) = 0 \quad \forall x \geq 0$$