

APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI

PARLANDO DI RETTA TANGENTE ABBIAMO

GIÀ INTRODOTTO UN' APPROSSIMAZIONE DI
UNA FUNZIONE VICINO AD UN PUNTO DATO
IN CHE SENSO LA RETTA TANGENTE
APPROSSIMA LA FUNZIONE f ?

SIA f DERIVABILE IN (a, b)

$x_0 \in (a, b)$ INDICHIAMO CON $L_{x_0}(x)$ LA
RETTA TANGENTE AD f IN x_0

$$L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ES $f(x) = e^x - 2\sin(x) + 2$

$$x_0 = 0 \quad f(0) = 3 \quad f'(x) = e^x - 2\cos(x) \quad f'(0) = -1$$

$$L_0(x) = 3 - x$$

PRENDERE $L_{x_0}(x)$ AL POSTO DI f EQUIVALE
A FARE UNA LINEARIZZAZIONE DI f , IN

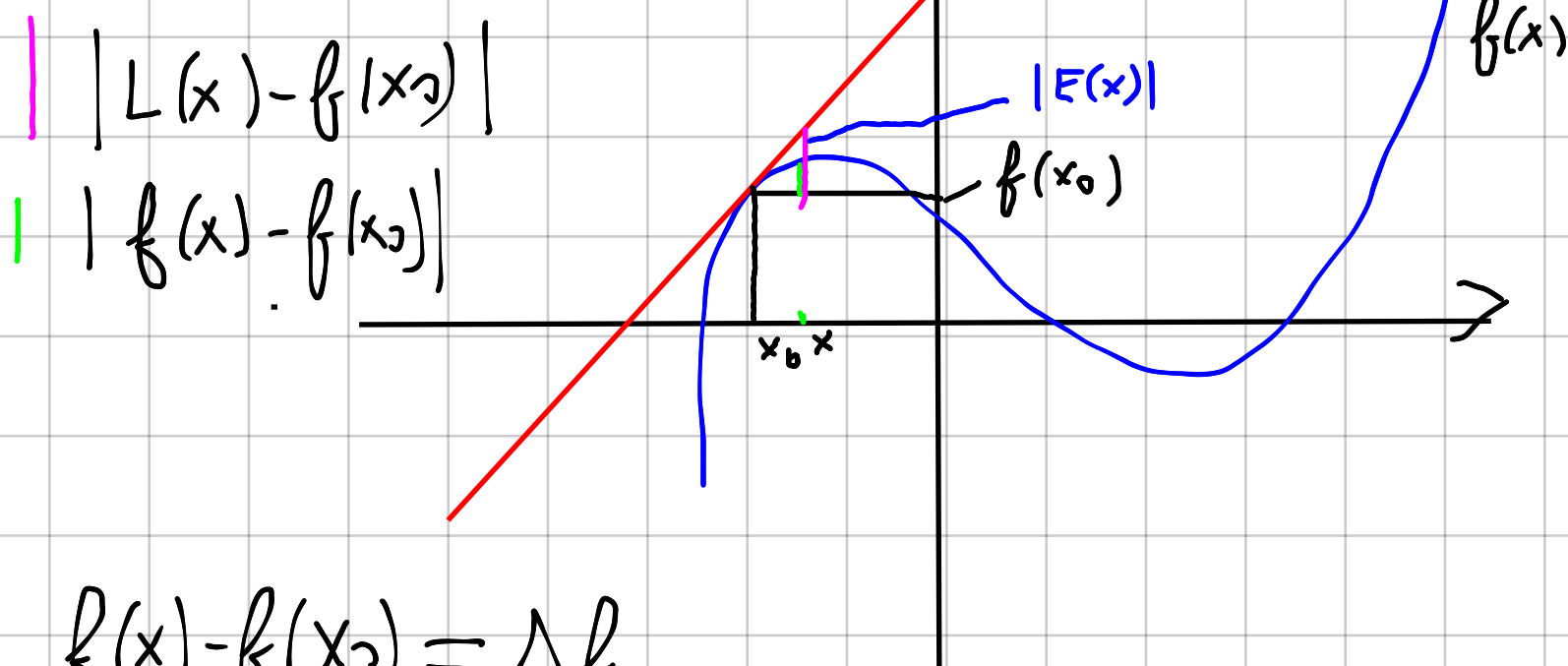
QUALCHIE MODO SI CERCA DI SOSTITUIRE AD f

UNA SEMPLICE FUNZ. LINEARE, SPERANDO CHE

QUESTA "APPROSSIMI" BEN f VICINO AL PUNTO x_0

PER SEMPLIFICARE LE CALCOLE SCRIVEREMO IN FUTURO $L(x)$ INVECE DI

$L(x)$ SOTTINTESO DA x_0



$$f(x) - f(x_0) = \Delta f$$

$$L(x) - f(x_0) = \cancel{f(x_0)} - \cancel{f(x_0)} + f'(x_0)(x - x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) \Delta x$$

$$\Delta f \simeq \frac{df}{dx}(x_0) \Delta x$$

FISSATO x_0 INTRODUCIAMO

$$E(x) = \Delta f - \frac{df}{dx}(x_0) \Delta x = f(x) - L(x)$$

QUESTO CORRISPONDE ALL'ERRORE CHE SI

COMMETTE A CALCOLO LA VARIAZIONE DI

f RISPETTO A $f(x_0)$ ATTRAVERSO LA SUA

APPROSSIMAZIONE LINEARE

$$E(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

$$E(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

PROP SIA f DERIVABILE 2 VOLTE IN (a, b)
 $(\exists f''(x))$ ALLORA ESISTE $\bar{x}$ CONTENUTO
 NELL'INTERVALLO DI ESTREMI x_0, x
 $[(x_0, x) \text{ se } x > x_0, (x, x_0) \text{ se } x < x_0]$

$$t.c. \quad E(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2} (x - x_0)^2$$

DIM SUPPONIAMO $x > x_0$, APPLICHIAMO

IL TH DI LAGRANGE GENERALIZZATO

(TH DI CAUCHY) ALLE FUNZIONI $h(t) = E(t)$

$$\text{E } g(t) = (t - x_0)^2 \text{ IN } [x_0, x]$$

$$(\exists \alpha \in (x_0, x) \text{ t.c. } \frac{h'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \frac{h(x) - h(x_0)}{g(x) - g(x_0)})$$

$$E'(t) = f'(t) - f'(x_0) \quad [(t - x_0)^2]' = 2(t - x_0)$$

$$\frac{f'(\alpha) - f'(x_0)}{2(\alpha - x_0)} = \frac{E(x) - E(x_0)}{(x - x_0)^2 - (x_0 - x_0)^2} = \frac{E(x)}{(x - x_0)^2}$$

APPLICANDO DI NUOVO LAGRANGE ALLA FUNZIONE f'

$$\exists \bar{x} \in (x_0, \alpha) \text{ t.c. } f''(\bar{x}) = f'(\alpha) - f'(x_0) (\alpha - x_0) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^2} = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x-x_0)} = \frac{f''(\bar{x})}{2} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)} \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2} (x-x_0)^2$$

QUINDI L'ERRORE SI PUO' STIMARE TRAMITE LA DERIVATA SECONDA, CHE E' COMUNQUE CALCOLATA IN UN PUNTO INTERMEDIATO. LA COSA IMPORTANTE E' CHE SE x E' VICINO AD x_0

ALLORA $(x-x_0)^2$ SARA' PICCOLO E QUINDI

L'ERRORE E' "PICCOLO". PER FARE UNA STIMA A LIVELLO QUANTITATIVO DOBBIAMO STIMARE $f''(\bar{x})$

COROLLARIO 1 SE f'' HA SEGNO COSTANTE

L'ERRORE HA SEGNO COSTANTE

$$f(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2} (x-\bar{x})^2, \quad \text{sgn}(f(x)) = \text{sgn}(f''(\bar{x}))$$

COROLLARIO 2 SE $\exists k$ t.c. $|f''(t)| < k$

NELL'INTERVALLO DI ESTREMI x_0 E x ALLORA

$$|f(x)| < \frac{k}{2} (x-x_0)^2$$

IN PARTICOLARE SE $\exists k \in \mathbb{R}. |f''(t)| \leq k$

IN (a, b) LA STIMA VALE PER OGNI SCELTA

DI $x_0 \in D_x$!!!

COROLLARIO SE $\exists M, N \in \mathbb{R}$

$$M \leq f''(t) \leq N \quad \forall t \in (a, b)$$

ABBIAMO PER OGNI PUNTO x_0 FISSATO E PER

OGNI x

$$\frac{M}{2} (x - x_0)^2 \leq E(x) \leq \frac{N}{2} (x - x_0)^2 \quad [E(x) = f(x) - L(x)]$$

$$\frac{M}{2} (x - x_0)^2 + L(x) \leq f(x) \leq \frac{N}{2} (x - x_0)^2 + L(x)$$

OSSERVAZIONE NEL CASO IN CUI M e N

HANNO LO STESSO SEGNO QUESTO FORNISCE

LA SEGUENTE STIMA

$$M, N > 0 \quad |E(x)| \leq \frac{N}{2} (x - x_0)^2$$

$$M, N < 0 \quad |E(x)| \leq \frac{|M|}{2} (x - x_0)^2$$

PERO' IN QUESTO CASO POSSIAMO TROVARE UNA
MIGLIORE STIMA PER $f(x)$ INVECE DI $L(x)$

INFATTI $L(x) + \frac{M(x-x_0)^2}{2} = f(x) \leq L(x) + \frac{N(x-x_0)^2}{2}$

SE PRENDIAMO IL PUNTO INTERMEDIO

DELL'INTERVALLO $\left(L(x) + \frac{M(x-x_0)^2}{2}, L(x) + \frac{N(x-x_0)^2}{2}\right)$

IN CUI SI TROVA $f(x)$ OVVERO

$$\frac{L(x) + \frac{M(x-x_0)^2}{2} + L(x) + \frac{N(x-x_0)^2}{2}}{2} =$$

$S(x) = L(x) + \frac{M+N}{4}(x-x_0)^2$ ALLORA OTTENIAMO

UNA STIMA MIGLIORE DELL'ERRORE INFATTI

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{N-M}{4}(x-x_0)^2 \quad (\text{META' LUNGHEZZA DELL'INTERVALLO})$$

NEL CASO IN CUI N e M SONO CONCORDI

$$\frac{N-M}{4} < \frac{N}{2} \quad \text{e} \quad \frac{N-M}{4} < -\frac{M}{2}$$

QUINDI LA STIMA E' MIGLIORE DI QUELLA

OTTENUTA PER $|E(x)| = |f(x) - L(x)|$

$$\sqrt{50} \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = ? \quad \text{CONVIENE}$$

SCAGLIERE $x_0 = 49$ PERCHÉ SAPPIAMO CALCOLARE

$$\sqrt{49} = 7. \quad \text{OKA} \quad x_0 = 49 \quad f(x_0) = 7$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \quad f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$$

$$f'(49) = \frac{1}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{14}$$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x = 50 \quad x_0 = 49, \quad L(x) = 7 + \frac{1}{14}(x - 49)$$

$$L(50) = 7 + \frac{1}{14}(50 - 49) = 7 + \frac{1}{14} = \frac{99}{14}$$

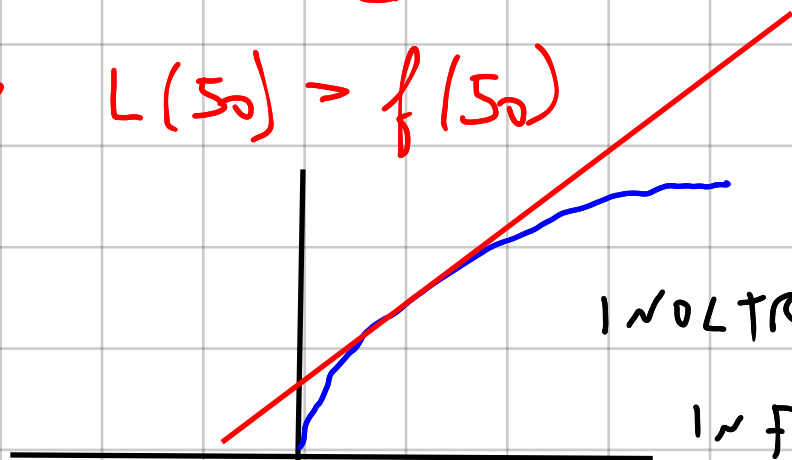
CHE ERRORE COMMETTIAMO CONSIDERANDO

$$L(50) = \frac{99}{14} \quad \text{AL POSTO DI } f(50) = \sqrt{50}$$

$$f(50) - L(50) = \frac{f''(\bar{x})}{2} (50 - 49)^2 \quad \bar{x} \in (49, 50)$$

$$f'' < 0 \Rightarrow L(50) > f(50)$$

$$f(50) < \frac{99}{14}$$



INOLTRE $f'' < 0$ E SC.

$$\text{INFATTI } f'' = -\frac{1}{4} x^{3/2}$$

$$\text{QUINDI } f''(\bar{x}) > f''(49) = -\frac{1}{4 \cdot 7^3}$$

$$f''(\bar{x}) > f''(45) = -\frac{1}{4 \cdot 7^3}$$

$$|E(50)| = |L(50) - f(50)| = L(50) - f(50) = -\frac{f''(\bar{x})}{2} \cdot 1 <$$

$$< \frac{1}{8 \cdot 7^3}$$

$$L(50) - \frac{1}{8 \cdot 7^3} < f(50) = \sqrt{50} < L(50)$$

↓

$$\frac{99}{14} - \frac{1}{8 \cdot 7^3} < \sqrt{50} < \frac{99}{14}$$

$$7,07069... < \sqrt{50} < 7,07142...$$

$$\sqrt{50} = 7,07106...$$

$\cos(75^\circ)$?

$$75^\circ \rightsquigarrow \overset{60^\circ}{\frac{\pi}{3}} + \overset{15^\circ}{\frac{\pi}{12}} = \frac{5}{12}\pi \quad f(x) = \cos(x)$$

$$x_0 = \frac{\pi}{3} \quad x = \frac{5}{12}\pi \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -\sin(x) \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$L\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$f''(x) = -\cos(x) < 0 \quad \text{in } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{5}{12}\pi\right) < L\left(\frac{5}{12}\pi\right)$$

$$\left|E\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right| = \frac{f''(\bar{x})}{2} \left(\frac{\pi}{12}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cos(\bar{x}) \quad \bar{x} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{12}\pi\right)$$

$$\cos(\bar{x}) < 1 \quad \text{nach AMCHF} \quad \cos(\bar{x}) < \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$\left[\cos(x) \text{ decreases in } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right]$

STIMA M/G/LINKE

$$L\left(\frac{5}{12}\pi\right) - \bar{\delta} < \cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) < L\left(\frac{5}{12}\pi\right)$$

$$\bar{\delta} = \left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$0,25\dots < \cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) < 0,27\dots$$

$$\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) = 0,258\dots$$

DUELLA CHE POSSIAMO ASPETTARCI IN GENERALE
 E' CHE L'APPROSSIMAZIONE E' BUONA SAMPATUTT)
 SE x E' VICINO A x_0

$$e^{\frac{1}{100}}, \quad f(x) = e^x \quad x_0 = 0, \quad f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x$$

$$f(0) = f'(0) = 1 \quad L(x) = 1 + x, \quad L\left(\frac{1}{100}\right) = 1 + \frac{1}{100} = 1,01$$

$$f \text{ CONVESSA} \quad f(x) > L(x) \rightarrow e^{\frac{1}{100}} > 1,01$$

ERRORE?

$$E\left(\frac{1}{100}\right) > 0 \quad E\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{e^{\bar{x}}}{2} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 \quad x \in \left(0, \frac{1}{10}\right)$$

$$e^{\bar{x}} \text{ CRASCE} \quad e^{\bar{x}} < e^{\frac{1}{10}} < e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} < \sqrt{3} < 2$$

$$E\left(\frac{1}{100}\right) < \frac{1}{(100)^2} = 0,0001$$

$$\Rightarrow \quad 1,01 < e^{\frac{1}{100}} < 1,01 + 0,0001$$

$$\sin(x) \quad f(x) = \sin(x) \quad x_0 = 0, \quad f'(x) = \cos(x),$$

$$f''(x) = -\sin(x), \quad f(0) = 0 \quad f'(0) = 1, \quad L(x) = x$$

$$L(2) = 2 \quad \text{PESSIMA APPROSSIMAZIONE VISTO}$$

$$\text{CHE} \quad \sin(x) \leq 1 \quad \text{V'FATTI} \quad \dots\dots$$

$$E(z) = -\frac{\sin(\bar{x})}{z} \cdot (z-0)^2 = -z \sin(\bar{x}) \quad x \in (0, z)$$

$$E(x) < 0 \Rightarrow \sin(z) < z \quad \text{MA L'UNICA STIMA}$$

$$\text{BUONA CHE POSSIAMO FARE È } |E(z)| < z \sin(z)$$

$$< z \text{ DA CUI}$$

$$z-z < \sin(z) < z \rightarrow 0 < \sin(z) < z \quad \boxed{\text{INVITILE}}$$

PER APPROSSIMARE MEGLIO I VALORI ASSUTTI
DALLE FUNZIONI PARTENDO DA UN PUNTO FISSATO NON
POSSIAMO ACCONTENTARCI DELLE SOLTE FUNZIONI
LINEARI DOBBIAMO CONSIDERARE DEI POLINOMI



POLINOMI DI TAYLOR $\rightarrow$ SVILUPPO DI TAYLOR

SIA f DERIVABILE n VOLTE IN (a, b) ,
FISSATO $x_0 \in (a, b) \exists$ UN POLINOMIO P_n DI
GRADO n TALE CHE $\frac{d^k}{dx^k} P_n(x_0) = f^{(k)}(x_0)$
 $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$? $f^{(0)}(x) = f(x)$

OVVERO $\exists$ UN POLINOMIO CHE ABBA LE DERIVATE
CORRISPONDENTI A QUELLE DI f NEL PUNTO x_0 ?

PER SEMPLIFICARE I CALCOLI CONVIENE SCEGLIERE
IL POLINOMIO NELLA FORMA

$$P_m(x) = a_m(x-x_0)^m + a_{m-1}(x-x_0)^{m-1} + a_{m-2}(x-x_0)^{m-2} + \dots + a_1(x-x_0) + a_0$$

CENTRATO IN x_0 !

$$f(x_0) = P_m(x_0) \Rightarrow f(x_0) = a_m \cdot 0 + a_{m-1} \cdot 0 + \dots + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0$$

$$a_0 = f(x_0)$$

$$f'(x_0) = P'_m(x_0) \Rightarrow P'_m(x) = m a_m(x-x_0)^{m-1} + (m-1) a_{m-1}(x-x_0)^{m-2} + \dots + 2 a_2(x-x_0) + a_1$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = P'_m(x_0) = a_1$$

$$a_1 = f'(x_0)$$

$$f''(x_0) = P''_m(x_0), \quad P''_m(x) = m(m-1) a_m(x-x_0)^{m-2} + \dots + 2 \cdot 3 a_3(x-x_0) + 2 a_2$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = P''_m(x_0) = 2 a_2$$

$$f'''(x_0) = P'''_m(x_0) = 2 \cdot 3 a_3$$

$$f^{(4)}(x_0) = P^{(4)}_m(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 a_4$$

$$f^{(5)}(x_0) = P^{(5)}_m(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 a_5$$

⋮

$$f^{(k)}(x_0) = P^{(k)}(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (k-1) \cdot k \cdot Q_k \quad k \in \{1, \dots, m\}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (k-1) \cdot k = k! \quad \boxed{0! = 1}$$

$$\text{OVVIAMENTE } P^k(x) \equiv 0 \quad \forall k > m$$

MENTRE PER $k = 0, 1, 2, \dots, m-1, m$ ABBIAMO

$$\boxed{f^{(k)}(x_0) = k! \cdot Q_k} \quad \text{DA CUI}$$

$$Q_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

QUINDI ABBIAMO TROVATO IN MODO UNICO IL
POLINOMIO CHE IN x_0 HA LE DERIVATE
FINO ALL'ORDINE m UGUALI A QUELLE DI $f(x)$

$$P_m(x_0) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{RETTA TANGENTE}} + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$$

FORMA "SIMILE" AL RESTO

IN PARTICOLARE POSSIAMO PENSARE CHE

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 \quad \text{SIA}$$

LA PARABOLA CHE MEGLIO APPROSSIMA $f(x)$
VICINO AD x_0

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\text{SE} \quad x_0 = 0 \quad f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = \sin(x) \quad f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x), \quad f'''(x) = -\cos(x)$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x) \quad f^{(5)}(x) = \cos(x) \quad f^{(6)}(x) = -\sin(x), \quad f^{(7)}(x) = -\cos(x)$$

$$\text{SI} \quad \text{RIPETIZIONE} \quad f^{(j+1)}(x) = f^{(j)}(x) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1$$

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x, \quad P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}, \quad P_6(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$P_{2m+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k + \dots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} (-1)^m$$

SVILUPPO DI TAYLOR

$f \in C^m((a,b)) \rightarrow$ DERIVABILE m

VOLTE IN (a,b) CON DERIVATE CONTINUE FINO ALL'ORDINE m

PROP SIA $f \in C^{m+1}((a,b))$, SIA $x_0 \in (a,b)$

$$P_m(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$$

IL POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE m DI f IN x_0 , $\forall x \in (a,b) \exists \bar{x}$ CONTENUTO NELL'INTERVALLO DI ESTREMI x_0, x

$((x_0, x) \text{ SE } x_0 < x, (x, x_0) \text{ SE } x < x_0)$

t.c.

$$f(x) = P_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(\bar{x})}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

QUESTA E' UNA GENERALIZZAZIONE DI QUANTO VISTO NEL CASO $m=1$

$$f(x) = P_m(x) + R_m(x) \rightarrow R_m(x) \text{ E' IL}$$

RESTO POSSIAMO PENSARE DI APPROSSIMARE f CON IL SUO POLINOMIO DI TAYLOR P_m

L'ERRORE CHE COMMETTIAMO È IL RESTO $R_m(x)$

CHÉ SI ESPRIME TRAMITE L'ESPRESSIONE

$$\frac{f^{(m+1)}(\bar{x})(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}$$

STIMARE QUESTO SIGNIFICA STIMARE L'ERRORE CHE SI
COMMETTE SOSTITUENDO f CON IL SUO POLINOMIO

IN PARTICOLARE SE SAPPIAMO CHE $|f^{(m+1)}(x)| < M$
IN UN INTERVALLO (a, b) OTTIENIAMO

$$|f(x) - P_m(x)| < \frac{M(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}$$

OSSERVIAMO LA STIMA DIVENTA BUONA SE
 x È VICINO A x_0

MA ANCHE SE m È ABBASTANZA GRANDE
IN QUANTO $m!$ È UN NUMERO CHE DIVENTA
"MOLTO GRANDE" QUANDO m È GRANDE

(VEDREMO COL LE SUCCESSIONI)

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \text{Sviluppo} \quad \text{in} \quad x_0 = 0$$

$$f(0) = \ln(1) = 0 \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad f'(0) = 1 \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(0) = -1, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(0) = -6, \quad \text{in generale}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{(1+x)^k} \rightarrow \begin{array}{l} \text{un modo per dire} \\ -1 \text{ se } k \text{ pari} \\ +1 \text{ se } k \text{ dispari} \end{array}$$

Quindi

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + \frac{x^n}{n} (-1)^{n+1}$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(1+\bar{x})^{n+1}} \quad \times \quad \begin{array}{l} \text{in } (x_0, x) \text{ se } x_0 < x \\ \text{in } (x, x_0) \text{ se } x_0 > x \end{array}$$

CALCOLARE $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$ con un errore $< 10^{-4}$

IDEA USARE LO SVILUPPO DI TAYLOR

LA DOMANDA SARA' FINO A CHE ORDINE DEVO ARRIVARE PER COMMITTERE un ERRORE $< 10^{-4}$?

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n + R_{2n+1}(x)$$

IL RESTO R GENERATO E' DATO DA UNA DELLE DERIVATE DI $\sin(x) \rightarrow \cos(x), -\sin(x), -\cos(x)$

CALCOLATA' IN UN CERTO PUNTO $\bar{x}$, $f(x) = \sin(x)$

SE CI FERMIAMO ALL'ORDINE n IL RESTO

SARA'
$$\frac{f^{(n+1)}(\bar{x}) x^{n+1}}{(n+1)!}$$

PER CUI, POICHE' $|\sin(x)|, |\cos(x)| \leq 1$,

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

ORA SE VOGLIAMO STIMARE $\sin\left(\frac{1}{10}\right)$

DOBBIAMO CONSIDERARE $x = \frac{1}{10}$

E DOBBIAMO VEDERE PER QUALE n $|R_n(x)|$

SI PUO' STIMARE con 10^{-4}

$$|R_n(\frac{1}{10})| \leq \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$$

$$n=1 \leadsto \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{200} \quad \sim$$

$$n=2 \leadsto \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6000} \quad \sim$$

$$n=3 \leadsto \frac{1}{10000} \cdot \frac{1}{4!} < \frac{1}{10000}$$

$$n=3 \quad \text{OK!!!}$$

$$\text{quindi } \left| \sin\left(\frac{1}{10}\right) - P_3\left(\frac{1}{10}\right) \right| = |R_3\left(\frac{1}{10}\right)| < 10^{-4}$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6} \quad P_3\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} = 0,9833\ldots$$

USANDO LA CALCOLATRICE ABBIAMO

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) = 0,9833\ldots$$

$$f(x) = O(g(x)) \text{ quando } x \rightarrow a$$

$f(x)$ è un O GRANDE di $g(x)$ quando x TENDENTE AD a SE IN UN INTORNO DI a $\exists k > 0$.

$$|f(x)| \leq k |g(x)|$$

OSSERVAZIONI

① SE $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

② SE $f(x) = O(g(x))$ e $h(x) = O(g(x))$
 $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad x \rightarrow a \Rightarrow c_1 f(x) + c_2 h(x) = O(g(x))$
 $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad x \rightarrow a$

③ $f(x) = O((x-a)^k g(x)) \quad x \rightarrow a \Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{(x-a)^k} = O(g(x))$$

IN PARTICOLARE SE $f(x) = O((x-a)^k) \Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{(x-a)^i} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

(4) SE $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = O(g(x))$
 $x \rightarrow a$

IN CERTE SITUAZIONI SOTTOSTANDO $x \rightarrow a$
 PER NON APPESANTIRE LE NOTAZIONI

IL CONCETTO DI O (O GRANDE)
 È UTILE QUANDO ABBIAMO FUNZIONI CHE

TENDONO A ZERO SE $x \rightarrow a$, OVVERO

SE $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ e $f(x) = O(g(x))$

SIGNIFICA DIRE CHE $f(x)$ TENDE A ZERO
 PER $x \rightarrow a$ ALMENO COME $g(x)$, POTREBBE

PERÒ TENDERE A ZERO PIÙ VELOCEMENTE

AD ESEMPIO $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$

SE $a = 0$ SICURAMENTE $x^2 = O(x)$

IN FATTI $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$

IN QUESTO CASO $f(x)$ TENDE A ZERO
 "PIÙ VELOCEMENTE" DI $g(x)$, QUESTO

SI ESPRIME TRAMITE IL CONCETTO

O | $O(g(x))$ | O PICCOLO | O | $g(x)$ | Θ UGUARDU
 $x \rightarrow e$

Def siano f e g DEFINITE in U

$U \sim T \cup R \cup O$ | O | e | $f(x) = o(g(x))$ | U | $x \rightarrow e$

se $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$!

U | PARTICOLARE $f(x) = O(g(x))$ (O GRANDE)

MA A PPLA MO U | INFORMAZIONE | U | PIU'

ES E MPI

$(x - e)^k = o((x - e)^i)$ se $k > i$

$\sin(x) = O(x)$ | FATTA | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

MA $\sin(x) \sim O(x)$ MENTRE

$\sin(x) = o(\sqrt{x})$ PER $x \rightarrow 0^+$ | FATTA

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \sqrt{x} = 0$

$3 \quad f(x) = 1 - \cos(x) \quad 1 - \cos(x) = O(x^2)$ | FATTA

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

$1 - \cos(x) = O(x)$ | FATTA | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 0$

TORNANDO AGLI SVILUPPI DI TAYLOR
POSSIAMO DIRE CHE SE $f \in C^{n+1}(a,b)$
 $\forall x_0 \in (a,b)$ ABBIAMO

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad [P_n \text{ POLINOMIO DI TAYLOR DI GRADO } n \text{ IN } x_0]$$

$$\text{DOVE } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{GRANDE}}}{O}((x-x_0)^{n+1})$$

$$= \underset{\substack{\downarrow \\ \text{PICCOLO}}}{O}((x-x_0)^n)$$

PROP SIA $f(x) = Q_n(x) + \underset{\substack{\nearrow \text{POLINOMIO DI GRADO } n}}{O}((x-x_0)^{n+1})$

ALLORA NECESSARIAMENTE $Q_n(x)$ È IL
POLINOMIO DI TAYLOR $P_n(x)$

QUIV. SE SCRIVIAMO $f(x)$ COME SOMMA DI
POLINOMIO E DI UN RESTO CHE È UN O GRANDE
DI $(x-x_0)^{n+1}$ IL POLINOMIO DEVE COINCIDERE
CON IL SUO POLINOMIO DI TAYLOR DI GRADO
 n IN x_0

DIM POI CHE' $f(x) = P_m(x) + O((x-x_0)^{n+1})$
 $f(x) = Q_m(x) + O((x-x_0)^{n+1})$

$$\underline{P_m(x) - Q_m(x) = O((x-x_0)^{n+1})}$$

↓

$$P_m(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_m(x-x_0)^m \quad \text{FACCIAMO}$$

VEDERE CHE $a_k = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, m \Rightarrow P_m(x) \equiv 0$
 $\Rightarrow P_m(x) = Q_m(x)$

SE PER ASSURDO $\exists i$ t.c. $a_k = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, i-1$
 $a_i \neq 0 \Rightarrow$

$$P_m(x) = (x-x_0)^i [a_i + a_{i+1}(x-x_0) + \dots + a_m(x-x_0)^{m-i}]$$

SE $R_m(x) = O((x-x_0)^{n+1})$

$$\Rightarrow \frac{R_m(x)}{(x-x_0)^i} = O((x-x_0)^{n+1-i}) \quad \text{MA } n+1-i > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_m(x)}{(x-x_0)^i} = 0 \quad \text{M.P.T.R.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_m(x)}{(x-x_0)^i} = a_i \neq 0 \quad \underline{\underline{\text{ASSURDO}}}$$

QUANDO $x_0 = 0$ IL POLINOMIO DI TAYLOR

VIENE CHIAMATO POLINOMIO DI McLaurin

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$e^{x^2} \quad y = x^2$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + O(x^{2n+2})$$

PER LA PROP PRECEDENTE QUESTO È UGUALE.

IL POLINOMIO DI McLaurin DI GRADO $2n$

$$\text{DI } e^{x^2}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n + O(x^{2n+3})$$

$$\sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{6} + \frac{x^{15}}{5!} + \dots + \frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!} (-1)^n + O(x^{6n+6})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} (-1)^n + O(x^{2n+2})$$

USO DEGLI ORDINI DI INFINITESIMO PER IL CALCOLO DEI LIMITI

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{se} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

FORMA $\frac{0}{0}$

o piccolo

o piccolo

↑

$$\text{se} \quad f(x) = f_1(x) + o(f_1(x)) \quad g(x) = g_1(x) + o(g_1(x))$$

ALLORA

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{1 + \frac{o(f_1(x))}{f_1(x)}}{1 + \frac{o(g_1(x))}{g_1(x)}} \rightarrow 0$$

$$\text{quindi se} \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

$$\text{se} \quad f \in C^{n+1}(I_a, b) \quad \text{RICORDIAMO} \quad \text{che} \quad \forall x_0 \in (a, b)$$

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n) \\ [P_n(x) + O((x-x_0)^{n+1})]$$

Quindi se abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{p(x)}$$

con $f \approx p$

sviluppiabili con Taylor
possiamo sostituire

ad $f \approx p$ i polinomi

ESEMPIO

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{e^x - \sin(x) - 1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} - x + o(x^2)}{1 + x + \frac{x^2}{2} - x + \frac{x^3}{6} - 1 + o(x^1) + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = -1$$

$$x^3 + o(x^1) + o(x^3) = o(x^2)$$