Tutoraggio - Calcolo I (Estremo superiore/inferiore–Limiti)

1. Calcolare estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi numerici (dire anche se si tratta di massimi o minimi)

   a) $\displaystyle\bigcup_{n\geq 2}\left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right], \qquad \bigcap_{n\geq 2}\left[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right].$

   b) $A_1 = \left\{(-1)^n\ \frac{2n-1}{n}, n\in\mathbb{N}\right\}, \quad A_2 = \left\{(-1)^n\ \frac{2n+1}{n}, n\in\mathbb{N}\right\}.$

2. $*$ Dimostrare che, se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono due successioni numeriche, allora si ha

   $$-\sup(a_n)\leq\sup(-a_n)\,, \quad \text{e} \quad \sup(a_n+b_n)\leq\sup(a_n)+\sup(b_n)\,,$$

   e la disuguaglianza, *in generale*, è stretta.

3. Applicando la definizione di limite discutere i limiti delle seguenti successioni numeriche

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+4}.$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right), \qquad \lim_{n\to\infty} e^{1+\frac{1}{n}}.$

   c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{16n-3}{n}}, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{8n^2+3}{n^2}}.$

4. Calcolare i limiti delle seguenti successioni numeriche

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\sqrt{n}.$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{2}{n}\right)\cos\left(\frac{2}{n}\right).$

   c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\frac{n^2+1}{n+1}\right).$

   d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{1+e^n}\right).$

   e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\ln(n)-\frac{1}{2}\ln(n^2+1)\right)\sin n.$

   f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\ln(\sqrt{n}-1)-\ln(\sqrt{n-1})\right)\cos n.$

   g) $\displaystyle *\lim_{n\to\infty}(3n+2)\sin\left(\frac{\pi n-5}{n+7}\right).$

   h) $\displaystyle *\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+\ln(n)}, \qquad *\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n.$