

Tutoraggio - Calcolo I (Limiti - Funzioni continue)

1. Studiare i seguenti limiti di funzioni

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{2-x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{3}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{|x|}.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x+1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + |\sin x|)^{\frac{1}{x}}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\tan x}.$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x \sin(e^{-x} \sin \frac{2}{x}).$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+x}}.$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x^2-1}}.$

2. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ studiare il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{ax} - 1}{3^x}.$

3. Determinare (se esistono) due valori $a, b \in \mathbb{R}$ tali che risulti continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x + \frac{\ln(1+a^2x)}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

4. Determinare (se esistono) due valori $a, b \in \mathbb{R}$ tali che risulti continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \leq 0 \\ (b+1)^2 + \sin \frac{a}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

5. * Utilizzando il *Teorema ponte* dimostrare che il seguente limite *non* esiste

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x+x \sin x}.$$

6. * Determinare una funzione definita nell'intervallo $[0, 1]$ che *non* sia continua in *nessun* punto del suo dominio. (Io suggerisco questa:

$$f(x) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(n! \pi x)}{\sin^2(n! \pi x) + t^2} \right),$$

siete d'accordo? Ne sapreste trovare una un po' più elegante da scrivere?)

** (...e una continua in *un solo punto* di $[0, 1]$?)