Sapienza, Università di Roma
Dipartimento di Matematica “G.Castelnuovo”

Note di base di

Analisi Matematica

Parte seconda

versione 1.2 (4 novembre 2011)

Lamberto LAMBERTI
Corrado MASCIA

Indice

CAPITOLO 1

Le funzioni continue

Dopo l'*excursus* del Capitolo precedente sulle successioni numeriche, torniamo a parlare di funzioni reali di variabile reale in generale. Per fissare le idee, supponiamo di voler studiare funzioni f, definite in $I \subset \mathbb{R}$, dove I è un intervallo (limitato o illimato) di $\mathbb{R}$. L'obiettivo principale del Capitolo è definire il significato della parola *continuità*.

1. Limite di funzioni

Tutto nasce dalla definizione di "limite". Come abbiamo visto per le successioni, il limite formalizza l'idea di "previsione" del comportamento di un oggetto sotto osservazione per opportuni valori della variabile.

Limiti all'infinito. Partiamo prima di tutto dal concetto di funzione infinitesima per $x \to +\infty$. Una funzione $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è infinitesima per $x \to +\infty$, se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M \quad \text{tale che} \quad |d(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x > M. \tag{1}$$

Il numero $M \in \mathbb{R}$ dipende dalla scelta di ε (come n_ε per le successioni): $M = M(\varepsilon)$.

La proprietà $|d(x)| < \varepsilon$ (equivalente a $-\varepsilon < d(x) < \varepsilon$) indica che il grafico della funzione d vive nella striscia infinita delimitata dalle retta $y = -\varepsilon$ e $y = \varepsilon$ per x sufficientemente grandi (Fig.1(a)), quindi la condizione (1) significa che il grafico della funzione d "tende a confondersi" con l'asse x per $x \to +\infty$.

Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, questa tende ad un limite ℓ per $x \to +\infty$ se è la funzione $f(x) - \ell$ ad essere infinitesima.

DEFINIZIONE 1.1. *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dice che f* converge ad $\ell \in \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell, \tag{2}$$

se $|f(x) - \ell|$ è infinitesima per $x \to +\infty$, cioè se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M \quad \textit{tale che} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall\, x > M.$$

La funzione $d(x) := |f(x) - \ell|$ rappresenta la lunghezza del segmento verticale di estremi $(x, f(x))$ e (x, ℓ) e "tendere ad ℓ" indica che tale lunghezza tende a zero.

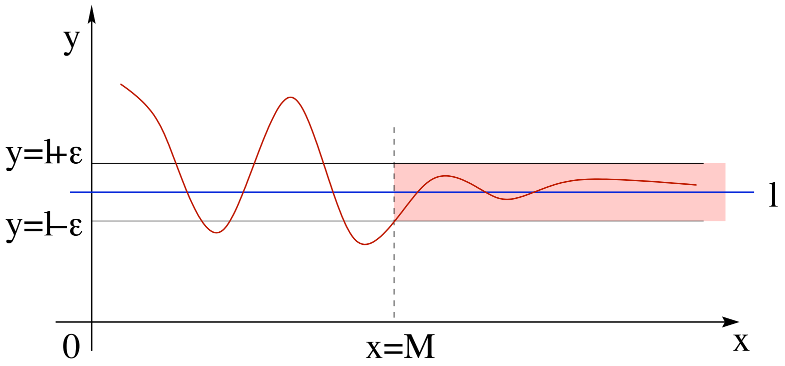

FIGURA 1. Una funzione che tende ad un limite per $x \to +\infty$.

Buona parte di quanto visto per le successioni si può ripetere. Ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Infatti, per ogni $\varepsilon \in (0,1)$, si ha

$$\left|\frac{x^2}{1+x^2} - 1\right| = \frac{1}{1+x^2} < \varepsilon \qquad \forall x > M := \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}.$$

OSSERVAZIONE 1.2. Nella definizione di limite di funzione per $x \to +\infty$, siamo partiti da una funzione f definita in <u>tutto</u> $\mathbb{R}$. Per definire il limite per $x \to +\infty$, basta anche di meno: l'unica cosa indispensabile è che l'insieme di definizione sia non limitato superiormente. Pensate al caso delle successioni: sono funzioni definite su $\mathbb{N}$ (e quindi non su una semiretta) e il limite per $n \to +\infty$ ha perfettamente senso.

Analogamente si possono definire anche:
– limiti divergenti: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ o $= -\infty$;
– limiti per x che tende a $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Limiti in un punto. Per funzioni definite in intervalli, è possibile parlare di limite in un punto. Procediamo come in precedenza chiarendo prima il concetto di "funzione infinitesima in un punto" e poi il concetto di "limite di funzione in un punto".

Sia $x_0 \in [a,b]$. Una funzione $d : (a,b) \to \mathbb{R}$ è infinitesima per $x \to x_0$ se

$$(3) \qquad \forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{t.c.} \quad |d(x)| < \varepsilon \quad \forall\,x \in (a,b),\ 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Rispetto alla definizione di funzione infinitesima per $x \to +\infty$, l'unica differenza sta nelle scelte di x per cui è soddisfatta la condizione $-\varepsilon < d(x) < \varepsilon$. In questo caso si tratta di tutti i valori x, diversi da x_0, che distano da x_0 meno di $\delta > 0$.

Definizione 1.3. *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in [a, b]$*. La funzione* f tende ad $\ell \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ *se* $f(x) - \ell$ *è infinitesima per* $x \to x_0$*, cioè se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \qquad t.c. \qquad |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall\, x \in (a, b),\, 0 < |x - x_0| < \delta.$$

In questo caso, si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell. \tag{4}$$

Il punto fondamentale è nella definizione di funzione infinitesima: per dimostrare che il limite della funzione è ℓ bisogna verificare che la distanza tra $f(x)$ e ℓ, cioè la quantità $d(x) := |f(x) - \ell|$, diventa piccola quando x è sufficientemente vicino a x_0.

Esempio 1.4. Proviamo a dimostrare il limite

$$\lim_{x \to 1} (3x - 5) = -2.$$

In questo caso $f(x) = 3x - 5$, $x_0 = 1$ e $\ell = -2$. Per definizione, basta mostrare che la quantità $|f(x) - \ell|$ è infinitesima per x che tende ad 1. Poniamoci quindi l'obiettivo di stimarla in termini di una funzione in cui compaia la distanza $|x - 1|$:

$$|f(x) - \ell| = |(3x - 5) - (-2)| = |3x - 3| = 3|x - 1|.$$

Perfetto! Da queste uguaglianze segue la conclusione. Se vogliamo conoscere esplicitamente il valore di δ in funzione di ε, così come richiesto dalla definizione, basta osservare che se $|x - 1| < \delta$, allora $|f(x) - \ell| < 3\delta$, quindi dato $\varepsilon > 0$, basta scegliere δ in modo che $3\delta = \varepsilon$, cioè $\delta = \varepsilon/3$.

Esempio 1.5. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, calcoliamo $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x$. E' ragionevole aspettarsi che tale limite esista e che valga $\ell = \sin x_0$, quindi proviamo a stimare $|\sin x - \sin x_0|$. Usando una delle (diaboliche) formule di prostaferesi,

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right| \le 2 \left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right|.$$

Dato che $|\sin x| \le |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (Cap. 2, Es. **??**), si ottiene

$$|\sin x - \sin x_0| \le 2 \left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|,$$

da cui segue

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

Volendo determinare esplicitamente δ, dato $\varepsilon > 0$, basta scegliere $\delta := \varepsilon$ per fare in modo che, se $|x - x_0| < \delta$, allora $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$.

Esercizio 1.6. *Dimostrare che, per ogni* $x_0 \in \mathbb{R}$*, vale* $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$*.*

Esempio 1.7. Vediamo un limite più complicato:

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1.$$

Euristicamente il risultato è più che ragionevole, dato che, dalla definizione dell'esponenziale data in (**??**), segue

$$e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

e ciascuno dei termini sommati tende a zero per $x \to 0$. Il problema è che i termini sommati sono infiniti! Per dimostrare in modo rigoroso la validità del limite bisogna, come sempre, stimare il termine $|f(x) - \ell| = |e^x - 1|$:

$$|e^x - 1| = \left| x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \right| \le |x| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)!} \le |x| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = |x| e^{|x|}$$

(nella riga precedente ci sono due disuguaglianze per serie... perché sono lecite?). Se scegliamo $|x| < 1$, si ha $e^{|x|} \le e$ (si ricordi che la funzione e^x è crescente), quindi

$$|e^x - 1| \le |x| e^{|x|} \le e\,|x| \qquad \forall\, x \in (-1, 1),$$

da cui si arriva alla conclusione.

Osservazione 1.8. $x \neq x_0$. I punti x che intervengono nel limite per $x \to x_0$ sono, per definizione, *distinti da* x_0. In parole povere, il limite della funzione f per $x \to x_0$ è il comportamento che si prevede per la funzione f in x_0, in base al grafico della funzione vicino a x_0, ma *indipendentemente* da quello che succede nel punto limite.

A guardare bene, la Definizione 1.3 vale, così com'è per funzioni f definite in $(a, b) \setminus \{x_0\}$ (e $x_0 \in (a, b)$), cioè funzioni che non sono definite nel punto limite! Quello che conta è il punto limite x_0 sia "vicino" a punti in cui la funzione è definita: non ha senso calcolare il limite per $x \to 2$ di una funzione che è definita in $[0, 1]$!

Come si dimostra che un limite non esiste? Dalla definizione di limite, segue che, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, allora per ogni successione x_n, contenuta nell'insieme di definizione di f, e tale che x_n tende a x_0 per $n \to +\infty$, la successione $f(x_n)$ tende ad ℓ per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell. \tag{5}$$

Esercizio 1.9. *Dimostrare l'affermazione che avete appena letto.*

Dall'implicazione (5) discende il seguente

CRITERIO 1.10. <u>Non esistenza del limite.</u> *Se esistono due successioni x_n e ξ_n entrambe convergenti a x_0 e tali che*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(\xi_n),$$

la funzione f non può ammettere limite per $x \to x_0$.

Un esempio chiarirà meglio le idee. Consideriamo la funzione

$$\textsf{segno di } x: \qquad \operatorname{sgn} x := \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ +1 & x>0 \end{cases}$$

e consideriamo $x_n = \frac{1}{n}$ e $\xi_n = -\frac{1}{n}$. È evidente che $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n = 0$. Inoltre, per ogni n, $f(x_n) = 1$ e $f(\xi_n) = -1$, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1 \neq -1 \lim_{n\to+\infty} f(\xi_n).$$

Pertanto la funzione sgn non ammette limite per $x \to 0$.

ESERCIZIO 1.11. *Dimostrare che* $\sin(1/x)$ *non ammette limite per* $x \to 0$.

Limite destro e limite sinistro. Quando si studia una funzione solo a destra o a sinistra del punto limite x_0 si parla di limite destro e di limite sinistro.

DEFINIZIONE 1.12. *La funzione f ha* limite destro *uguale ad ℓ per x che tende a x_0, e si scrive $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$, se*

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta>0 \quad t.c. \quad |f(x)-\ell|<\varepsilon \quad \forall\,x\in(a,b),\ x_0<x<x_0+\delta.$$

Analogamente per il limite sinistro*, che si indica con $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$.*

ESERCIZIO 1.13. *Dimostrare che* $\lim\limits_{x\to0^-} \operatorname{sgn} x = -1, \quad \lim\limits_{x\to0^+} \operatorname{sgn} x = +1.$

ESERCIZIO 1.14. *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dalla definizione di limite destro e sinistro si deduce (con poca fatica) il seguente:

CRITERIO 1.15. <u>Esistenza del limite.</u> *Una funzione ammette limite in un punto se e solo se esistono sia il limite destro che quello sinistro e coincidono.*

Di conseguenza, se uno tra i limiti destro e sinistro non esiste, o se entrambi esistono, ma non coincidono, la funzione non ha limite per $x \to x_0$. Avendo risolto l'Esercizio 1.14, sapete dire se $\arctan(1/x)$ ammette limite per $x \to 0$?

Limiti e operazioni razionali. Limiti di somme, differenze, prodotti e rapporti di funzioni godono delle stesse proprietà viste per le successioni:

$$
\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \\ \lim_{x\to x_0} g(x)=m \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to x_0} \big(f(x)\pm g(x)\big)=\ell\pm m, \\ \lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\ell\, m, \\ \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\ell}{m} \qquad \text{se } m\neq 0. \end{array}\right. \tag{6}
$$

Esempio 1.16. Per calcolare

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+x-1}{x^5+x^3}$$

non è una buona idea usare la definizione! Basta applicare le regole su descritte:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+x-1}{x^5+x^3} &= \frac{\lim_{x\to 1}(3x^2+x-1)}{\lim_{x\to 1}(x^5+x^3)} = \frac{\lim_{x\to 1}3x^2+\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}1}{\lim_{x\to 1}x^5+\lim_{x\to 1}x^3} \\
&= \frac{(\lim_{x\to 1}3)(\lim_{x\to 1}x)^2+\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}1}{(\lim_{x\to 1}x)^5+(\lim_{x\to 1}x)^3} = \frac{3+1-1}{1+1} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Ora, se volete, provate a dimostrare il risultato usando solo la definizione di limite...

Esempio 1.17. Fissato $x_0\in\mathbb{R}$, calcoliamo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}.$$

Qui non è possibile applicare direttamente le regole viste, perché il denominatore tende a zero per $x\to x_0$. Ma basta una riga di conto per risolvere il problema:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=\lim_{x\to x_0}x+\lim_{x\to x_0}x_0=2x_0.$$

Analogamente, si dimostra che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}=3x_0^2,$$

utilizzando l'identità $x^3-x_0^3=(x^2+xx_0+x_0^2)(x-x_0)$. In generale, vale

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=nx_0^{n-1} \qquad n\in\mathbb{N},$$

infatti

$$\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1}.$$

Limiti e disequazioni. Anche per il rapporto tra limiti e disequazioni valgono le stesse regole già viste nel caso delle successioni: supponiamo che le funzioni f e g abbiano limite per $x \to x_0$, allora

$$f(x) < g(x) \qquad (\text{o} \quad f(x) \leq g(x)) \qquad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

La disuguaglianza stretta diviene una disuguaglianza debole. Le dimostrazioni sono analoghe a quelle per le successioni.

Da queste proprietà discende la seguente proposizione (analoga al Teorema **??**).

PROPOSIZIONE 1.18. *Siano f, g, h tre funzioni tali che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per tutti i valori x in un intorno di x_0. Allora*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell = \lim_{x\to x_0} h(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell.$$

Omettiamo la dimostrazione.

Zeri a denominatore ed uso degli infiniti. Anche per quanto riguarda quest'argomento, quello che c'è da capire è interamente contenuto nel caso delle successioni. In particolare, le forme indeterminate che si incontrano con più frequenza sono: $\frac{0}{0}$, $\infty \cdot 0$, $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Alcuni limiti notevoli. Il fatto che il limite sia compatibile con le operazioni di somma e prodotto fa in modo che nel calcolo effettivo dei limiti, nella maggior parte dei casi, non si debba utilizzare direttamente la definizione (con conseguente calcolo di ε e $\delta(\varepsilon)$, spesso tremendamente complicato), ma ci si possa ricondurre a limiti già noti. Il problema, a questo punto, è che di limiti noti ne abbiamo pochini... Corriamo al mercato ad acquistarne un po'.

ESEMPIO 1.19. Partiamo da un limite che non può mancare nella casa di nessuno:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{7}$$

(il valore x, come sempre, è calcolato in radianti). Dal significato geometrico di $\sin x$ si deduce immediatamente che

$$\sin x < x < \tan x \qquad \forall\, x \in (0, \pi/2).$$

Ne segue che, per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Dato che $\cos x$ tende a $\cos 0 = 1$ per $x \to 0$, il rapporto $\dfrac{\sin x}{x}$ tende ad 1 per $x \to 0^+$. Lo stesso vale anche per $x \to 0^-$, dato che la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è una funzione pari (verificare!). Quindi, per il Criterio 1.15, il gioco è fatto.

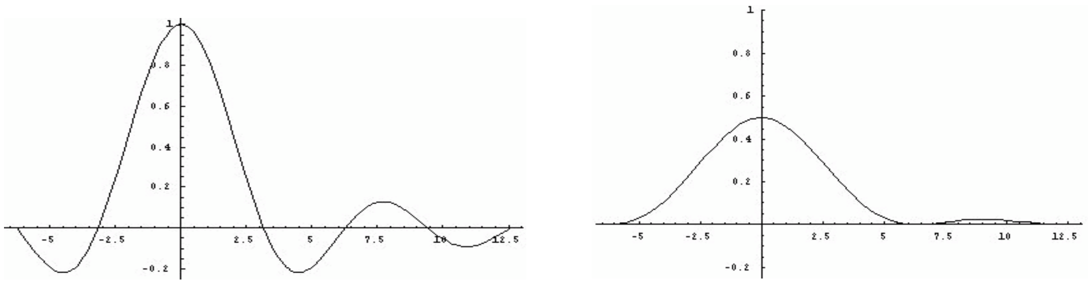

FIGURA 2. (a) $y = \frac{\sin x}{x}$, (b) $y = \frac{1-\cos x}{x^2}$

ESERCIZIO 1.20. *Utilizzando (7), dimostrare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Soluzione. Per il primo, basta ricordare la definizione di $\tan x$ e usare le proprietà dei limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} = 1.$$

Per i restanti due, si può utilizzare l'uguaglianza

$$1 - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x},$$

da cui seguono

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{1+\cos x} \sin x = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

e quindi il risultato.

ESEMPIO 1.21. Una coppia di limiti molto importanti è

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{8}$$

Per dimostrare il primo limite di (8), notiamo che

$$f(x) := \frac{e^x - 1}{x} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!},$$

dove si è usato che $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Quindi

$$|f(x)| \le |x| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+2)!} \le |x| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = |x| e^{|x|}.$$

Dato che $0 < e^{|x|} \le e$ per tutti i valori $x \in [-1, 1]$, si ha $|f(x)| \le e|x|$ che tende a zero per $x \to 0$.

Il secondo limite in (8) si può ottenere dal primo ponendo $y = e^x - 1$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

e passando agli inversi si ha la conclusione.

Osservazione 1.22. Nel calcolo di quest'ultimo limite si è utilizzato il cambiamento di variabile per dedurre il valore del limite a partire dal precedente. La giustificazione rigorosa di questo procedimento può essere fatta, con un po' di attenzione, ma senza troppa difficoltà, a partire dalla definizione di limite.

I limiti appena presentati sono utili come esempi, ma allo stesso tempo, sono fondamentali per riuscire a calcolare altri limiti. Altri limiti importanti, di cui non diamo la dimostrazione, sono

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0 \qquad \forall\, a > 1,\ \alpha > 0.$$

Il significato di ciascuno di questi è particolarmente interessante. Nel primo limite, la funzione x^α tende a 0 per $x \to 0$, mentre $\ln x$ tende a $-\infty$. Non è chiaro a priori quale sia il comportamento della funzione prodotto dato che sono presenti due termini contrastanti. Il fatto che il limite valga zero vuol dire che la funzione x^α tende a zero tanto rapidamente da riuscire a dominare la divergenza $-\infty$ del termine $\ln x$. Allo stesso modo, il secondo limite indica che l'esponenziale a^x, con $a > 1$ diverge più rapidamente di x^α, e il terzo esprime che, al contrario, il logaritmo $\log_a x$, con $a > 1$, diverge più lentamente di x^α. Sulle questioni di ordini di infinito e di infinitesimo ritorneremo più avanti.

2. Continuità

Il concetto di limite è collegato a quello di *continuità*. Intuitivamente la continuità significa che piccoli cambiamenti nella variabile indipendente x provocano piccoli cambiamenti nella variabile dipendente $y = f(x)$. Al contrario un grafico costituito da due parti separate da una "frattura" in corrispondenza dell'ascissa x_0 esibisce (in quel punto) una *discontinuità di salto* (ad esempio, la funzione $\operatorname{sgn} x$ ha una discontinuità di salto in $x_0 = 0$).

L'idea di continuità è implicita nell'uso quotidiano della matematica elementare. Quando una funzione $y = f(x)$ è descritta da tabelle (come nel caso dei logaritmi o delle funzioni trigonometriche), i valori di y possono essere dati solo per un insieme "discreto" di valori della variabile indipendente x, ad esempio in intervalli di lunghezza 10^{-3} (un millesimo) o 10^{-6} (un milionesimo). Però potrebbe essere utile conoscere il valore della funzione per valori intermedi. In questo caso, si assume tacitamente che il valore $f(x_0)$ cercato, corrispondente ad un valore x_0 non presente nella tabella, sia approssimativamente lo stesso di $f(x)$ per un x che appaia nella tabella e che sia "vicino" ad x_0.

Definizione 2.1. *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. La funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è* continua in *$x_0 \in I$ se ha limite per $x \to x_0$ esiste e tale limite coincide con il valore di f in x_0:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

cioè (ricordando la definizione di limite) se

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0 \quad t.c. \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in I,\, |x - x_0| < \delta.$$

Se una funzione f è continua in ogni punto $x_0 \in I$ allora f è continua in *I.*

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto nel grafico. I punti (x, y) tali che $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$ costituiscono una striscia orizzontale J che contiene P_0. La continuità di f in x_0 significa che per ogni striscia di questo genere J (di qualsiasi ampiezza) è possibile determinare una striscia verticale K data da $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ sufficientemente piccola tale che tutti i punti del grafico di f che sono in K giacciono anche in J.

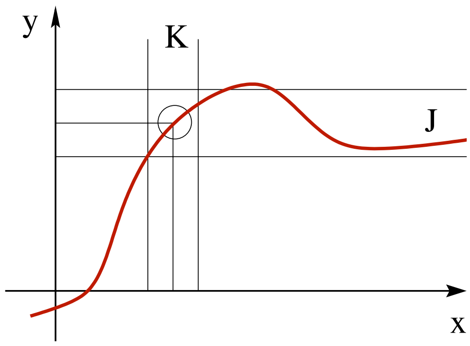

Figura 3. Significato geometrico della continuità

Esempio 2.2. Per la funzione affine $f(x) = 5x + 3$ abbiamo

$$|f(x) - f(x_0)| = |(5x + 3) - (5x_0 + 3)| = 5|x - x_0|,$$

che esprime il fatto che la funzione $y = 5x + 3$ *dilata* le distanze di un fattore 5. In questo caso, ovviamente $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per tutti valori x per cui $|x - x_0| < \varepsilon/5$. La condizione di continuità di f nel punto x_0 è soddisfatta scegliendo $\delta = \varepsilon/5$. Chiaramente è possibile scegliere un qualsiasi valore positivo tale che $\delta \leq \varepsilon/5$.

Osservazione 2.3. Nella definizione di continuità, la condizione $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ è soddisfatta anche per x_0, a differenza della definizione di limite dove si chiede $|f(x) - \ell|$ per valori x vicini a x_0, ma <u>diversi</u> da x_0 stesso.

Osservazione 2.4. *Scommettiamo che...* Per chiarire ulteriormente il significato di continuità, spieghiamo le regole di un gioco per due persone. Supponiamo assegnata una funzione f ed il punto x_0 nel suo insieme di definizione. Il giocatore B può scegliere un qualsiasi numero $\varepsilon > 0$ a suo gusto e piacimento. Per ogni scelta di ε compiuta da B, A deve essere in grado di determinare $\delta > 0$ in modo che tutti i valori immagine $f(x)$, per x che dista da x_0 meno di δ, distino da $f(x_0)$ meno di ε. Se il giocatore B trova un $\varepsilon > 0$ per cui A non possa rispondere, vince; viceversa, se per ogni ε, A è in grado di trovare δ opportuno, vince il giocatore A. Il giocatore A vince se e solo se la funzione f è continua in x_0.

Se la funzione è $\sin(x^2)$ ed il punto $x_0 = 1$, quale giocatore vorreste essere: il giocatore A o il giocatore B?

Ora che abbiamo una definizione chiara di continuità, vorremmo sapere quante e quali funzioni tra quelle che conosciamo sono continue. Dalle proprietà dei limiti di somma, prodotto, quoziente discende che

la somma, la differenza, il prodotto e il rapporto di funzioni continue danno luogo a funzioni continue (prudenza nel quoziente![1]).

Anche le operazioni di composizione e di inversione conservano la continuità:

la composizione $f \circ g$ di funzioni f e g continue è continua

l'inversa f^{-1} di una funzione f continua è una funzione continua

La prima delle due proprietà discende dalla catena di implicazioni

$$x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad g(x) \to g(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(g(x))) \to f((g(x_0))).$$

La continuità della funzione inversa è geometricamente evidente, una volta ricordato che il grafico di f^{-1} si può ottenere da quello di f tramite un ribaltamento attorno alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Ma tutte queste bellissime proprietà non servono a nulla fino a che non si conosca per lo meno una funzione continua. Passiamo quindi ad analizzare qualche esempio di base.

Esempio 2.5. *Le funzioni costanti sono continue.* Banale! Infatti se $f(x) = c$ per ogni x, allora $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0$ sempre e comunque.

Esempio 2.6. *La funzione $f(x) = x$ è continua.* Anche questo è facile, dato che, fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$, quindi basta scegliere $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ nella definizione di continuità per giungere alla conclusione.

[1] Come sempre nel caso della divisione, bisogna stare attenti al fatto che la divisione per zero non ha senso. Perciò se si hanno due funzione continue f e g, la funzione rapporto è una funzione continua dove è definito, cioè dove la funzione g non si azzera.

Esempio 2.7. *I polinomi sono funzioni continue.* Qui basta combinare le proprietà dei limiti (6), con la definizione di continuità e con i due esempi precedenti. Se $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ per $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ dati, allora

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} p(x) &= \lim_{x\to x_0} (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \\ &= \lim_{x\to x_0} a_0 + \lim_{x\to x_0} a_1 \lim_{x\to x_0} x + \cdots + \lim_{x\to x_0} a_n \big(\lim_{x\to x_0} x\big)^n \\ &= a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = p(x_0).\end{aligned}$$

Esempio 2.8. *La funzione $f(x) = \sin x$ è una funzione continua.* Lo abbiamo già visto nell'Esempio 1.5. Stesso dicasi per $\cos x$ (avete risolto l'Esercizio 1.6?).

Esempio 2.9. Cosa dire dell'esponenziale e^x? L'Esempio 1.7 ne garantisce la continuità in $x_0 = 0$. Da questa è possibile dedurre la continuità anche negli altri punti, utilizzando la proprietà $e^{x+y} = e^xe^y$. Infatti:

$$\lim_{x\to x_0} e^x = \lim_{x\to x_0} e^{x-x_0+x_0} = \lim_{x\to x_0} e^{x-x_0}e^{x_0} = \lim_{x\to x_0} e^{x-x_0} \lim_{x\to x_0} e^{x_0} = \lim_{h\to 0} e^h \lim_{x\to x_0} e^{x_0} = e^{x_0}.$$

Una volta che abbiamo questi mattoni fondamentali, ecco a cascata una quantità impressionante di funzioni continue:
– le funzioni razionali,
– le funzioni trigonometriche,
– esponenziali e logaritmi,
– tutte le loro composizioni e inverse.

Esercizio 2.10. *Perché le funzioni $f(x) = 10^x$ e $g(x) = \log_{10} x$ sono continue?*

Estensione per continuità. Quando una funzione f non è definita in x_0, ma esiste il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, è naturale definire una nuova funzione come segue

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0. \end{cases}$$

La funzione F si chiama estensione per continuità di f, dato che, per costruzione, F è continua in x_0. La domanda "è possibile estendere per continuità in x_0 una assegnata funzione f?" equivale a "esiste il limite di f per $x \to x_0$?"

Esempio 2.11. La funzione $\frac{\sin x}{x}$ non è definita in $x = 0$, ma ammette limite per $x \to 0$. Quindi può essere *estesa per continuità* in $x = 0$ attribuendole il valore 1. La nuova funzione (continua in $\mathbb{R}$) è

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2.12. *(a) Dire quale delle seguenti funzioni può essere estesa per continuità in $x = 0$*

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x\sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (x+1)\sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

(b) Sia f una funzione continua in $x = 0$ e tale che $f(0) = 0$. E' vero che la funzione $f(x)\sin(1/x)$ può essere estesa per continuità in $x = 0$?

Funzioni lipschitziane. Una funzione $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è lipschitziana se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in I.$$

La lipschitzianità corrisponde al fatto che il *rapporto incrementale*, cioè il coefficiente della retta secante passante per i punti del grafico di f di coordinate $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2},$$

è limitato in valore assoluto da un fissato valore finito L.

Esempi di funzioni lipschitziane sono le funzioni affini $f(x) = ax + b$. Un altro esempio è $f(x) = \sin x$, infatti, come già osservato in precedenza,

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|.$$

Tutte le funzioni lipschitziane sono continue: dato $\varepsilon > 0$, per avere $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ basta scegliere $\delta = \varepsilon/L$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta = \varepsilon.$$

ESERCIZIO 2.13. *Dimostrare le seguenti affermazioni.*
(i) Se f, g sono funzioni lipschitziane, allora anche $f + g$ è lipschitziana.
(ii) Se f, g sono lipschitziane e limitate, *allora fg è lipschitziana.*
(iii) Se in (ii) si rimuove l'ipotesi di limitatezza, la conclusione non è vera.

Soluzione. (i) Indicate con L_f, L_g, due costanti per cui è soddisfatta la condizione di Lipschitz per f e g rispettivamente, allora

$$|(f(x) + g(x)) - (f(y) - g(y))| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq (L_f + L_g)|x - y|.$$

(ii) Indichiamo con L_f, L_g, due costanti per cui è soddisfatta la condizione di Lipschitz per f e g rispettivamente, e sia $|f(x)| \leq M_f$ e $|g(x)| \leq M_g$, allora

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)||g(x)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \leq (L_f M_g + M_f L_g)|x - y|.\end{aligned}$$

(iii) Ad esempio, si può scegliere $f(x) = g(x) = x$: il prodotto è la funzione x^2 che non è lipschitziana dato che

$$\sup_{x \neq y} \frac{|x^2 - y^2|}{|x - y|} = \sup_{x \neq y} |x + y| = +\infty.$$

Chiaro, no?

Esercizio 2.14. *Una funzione f è* hölderiana *se esistono $L, \alpha > 0$ tali che*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|^\alpha \qquad \forall x_1, x_2.$$

Dimostrare che se una funzione è hölderiana allora è anche continua.

Soluzione. Infatti dato $\varepsilon > 0$, per avere $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ basta scegliere $\delta = L^{-1/\alpha}\varepsilon^{1/\alpha}$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|^\alpha < L\delta^\alpha = \varepsilon,$$

per giungere alla conclusione sani e salvi.

3. Esempi di discontinuità

Un modo per chiarire ulteriormente la definizione di continuità è "in negativo", cioè dando esempi per cui non è soddisfatta.

Esempio 3.1. Riprendiamo l'esempio $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Chiaramente, in ogni punto $x_0 \neq 0$, questa funzione è continua (qual è la scelta di δ in funzione di ε dato?). In $x_0 = 0$ la funzione, invece, non è continua. Infatti non è possibile determinare nessun δ quando ε sia minore di 1, dato che $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = 1$ per ogni $x \neq 0$.

La funzione $\operatorname{sgn} x$ è l'esempio più semplice di discontinuità in un punto x_0 detto discontinuità di salto: la funzione f si avvicina, per x che tende a x_0 da destra e da sinistra, a valori limite che non coincidono con il valore di f in x_0.

Esempio 3.2. Un esempio di discontinuità in cui non ci siano limiti né da destra né da sinistra è dato dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Il grafico della funzione f può essere dedotto da quello della funzione $\sin x$ attraverso un "passaggio al reciproco" nella variabile indipendente. Grossolanamente parlando, tutte le oscillazioni (infinite!) della funzione $\sin x$ per $x > 1$ vengono compresse nell'intervallo limitato $(0, 1)$ e si accumulano sul segmento del piano (x, y) di estremi $(0, -1)$ e $(0, 1)$ e non c'è alcuna speranza che la funzione possa essere continua in $x = 0$. Una figura chiarisce più di mille parole (Fig.4(a)).

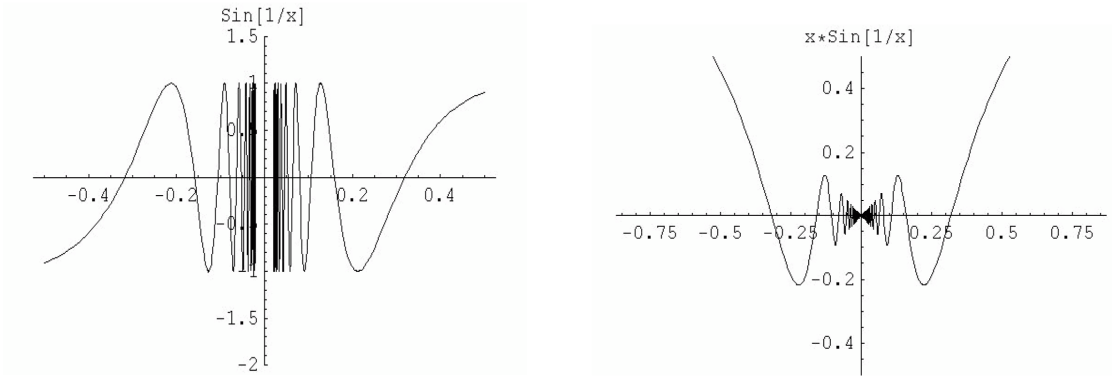

FIGURA 4. (a) Il grafico di $\sin(1/x)$; (b) Il grafico di $g(x)$.

Piccole varianti della funzione precedente possono condurre ad una funzione continua. Ad esempio consideriamo la funzione g seguente

$$g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Questa funzione (vedi Fig.4(b)) è continua in 0, infatti

$$|g(x) - 0| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \to 0 \qquad \text{per} \quad x \to 0.$$

Sapete dire se è continua in 0 la funzione $(x^2 + 1)f(x)$, dove f è data nell'Esempio 3?

ESERCIZIO 3.3. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione nondecrescente e discontinua in* $x_0 \in (a, b)$. *Che tipo di discontinuità ha la funzione* f *in* x_0*?*

4. Teoremi sulle funzioni continue

Ora che abbiamo a disposizione un campionario vasto di funzioni continue e non, passiamo a stabilire alcune proprietà fondamentali che discendono dalla continuità: il *teorema dei valori intermedi* e il *teorema di Weierstrass* (che concerne il problema dell'esistenza di massimo e minimo). Entrambi discendono dal fatto che l'insieme dei numeri reali è *completo*, proprietà che traduce il fatto che la retta reale non ha buchi e che, rigorosamente, si basa sul postulato degli intervalli incapsulati e sull'assioma di Archimede. Nelle pagine che seguono ci dedichiamo prima a capire l'enunciato di questi due Teoremi fondamentali e solo successivamente ne vedremo le dimostrazioni.

Teorema del valore intermedio. Intuitivamente non c'è dubbio che se una funzione è continua, e quindi non ha salti, non può passare da un valore ad un altro senza passare per tutti i valori intermedi. Pensiamo ad un esempio banale: se il signor Lafcadio fa una passeggiata in montagna e ci comunica che è partito da un rifugio che si trova a 2200 metri s.l.m. ed è arrivato in cima ad una montagna alta 3000 metri s.l.m., è vero che ad un certo punto si è trovato ad un'altitudine di 2800 metri? E più in generale, si è mai trovato ad una qualsiasi quota η compresa tra 2200 e 3000? La risposta (intuitiva) è "SI", a meno che non abbia utilizzato il teletrasporto...

TEOREMA 4.1. <u>*Teorema del valore intermedio.*</u> *Sia* $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua Allora, per ogni* $\eta \in [f(a), f(b)]$, *esiste* $x_0 \in [a,b]$ *tale che* $f(x_0) = \eta$.

Questo teorema dà condizioni sufficienti perchè l'equazione $f(x) = \eta$ abbia soluzione. Geometricamente, afferma che se i due punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ del grafico della funzione (continua) f giacciono su parti opposte rispetto alla retta $y = \eta$, allora il grafico di f interseca la retta in un punto intermedio.

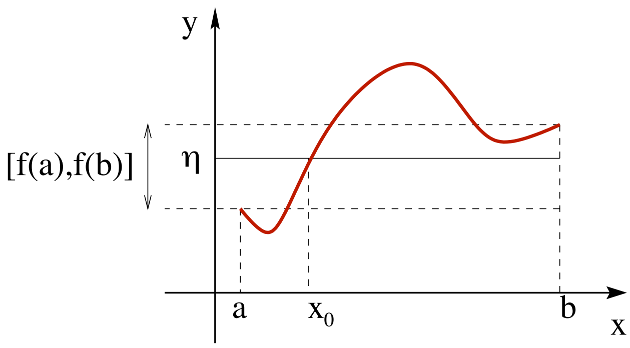

FIGURA 5. Il Teorema del valore intermedio

Controesempio 1. *f non è continua.* Nel caso di una funzione non continua la conclusione, in generale, è falsa. Ad esempio per la funzione

$$\textsf{segno di } x: \qquad \operatorname{sgn} x := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0, \end{cases}$$

non esistono soluzioni di $\operatorname{sgn} x = \eta$ per ogni $\eta \notin \{0, \pm 1\}$.

Controesempio 2. *f definita in unione di intervalli disgiunti.* Consideriamo la funzione $f : I = [-1, 0) \cup (0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Allora, nonostante $0 \in [-1, 1] = [f(-1), f(1)]$, l'equazione $\frac{1}{x} = 0$ non ammette soluzioni! Analogamente per $g : I = [0, 1] \cup [2, 3] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = x$, ci sono dei valori $\eta \in [g(0), g(3)] = [0, 3]$ tali che l'equazione $x = \eta$ non ammette soluzioni *in* I.

Qui si è persa una proprietà fondamentale degli intervalli: la *connessione*, cioè la garanzia che se x_1, x_2 appartengono all'intervallo I, allora $[x_1, x_2] \subset I$. In qualche modo si può immaginare che una funzione continua non generi "strappi" o "buchi" nella trasformazione del dominio di partenza in quello di arrivo. E' chiaro però che se il dominio di partenza è "già strappato", cioè sconnesso (come nel caso di due intervalli chiusi disgiunti), è possibile che ci siano buchi anche nel dominio di arrivo.

Controesempio 3. *L'importanza di essere reale (razionale non basta!).* Consideriamo la funzione $f : \mathbb{Q} \cap [0,2] \to \mathbb{Q}$ definita da $f(x) = x^2$. Allora $f(0) = 0$, $f(2) = 4$ ed è sensato domandarsi se ci siano soluzioni $x \in \mathbb{Q} \cap [0,2]$ al problema $x^2 = 2 \in (0,4)$. Come abbiamo già visto non c'è nessun valore razionale il cui quadrato sia 2. Quindi *il Teorema del valore intermedio non vale nei razionali!*

Esercizio 4.2. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Dimostrare, utilizzando il Teorema del valore intermedio, che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Cosa si può concludere se, invece, si suppone $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell_- \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_+ \in \mathbb{R}$?

Conseguenza del teorema del valore intermedio è il cosiddetto Teorema di esistenza degli zeri.

Corollario 4.3. Teorema di esistenza degli zeri. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora, se $f(a)f(b) < 0$ (cioè se $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno discorde), esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Esercizio 4.4. *Utilizzare il Teorema di esistenza degli zeri per dimostrare che ogni polinomio $p = p(x)$ di grado dispari ha sempre almeno uno zero.*

Soluzione. Se p è un polinomio di grado dispari

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \mp\infty,$$

e quindi esiste certamente $L > 0$ per cui $p(-L)p(L) < 0$. Di conseguenza, per il Teorema di esistenza degli zeri, esiste $x_0 \in (-L, L)$ che azzera il polinomio.

Una funzione strettamente monotòna, cioè tale che

$$x < x' \iff f(x) < f(x') \quad \text{oppure} \quad x < x' \iff f(x) > f(x'),$$

essendo iniettiva, è invertibile. In generale non è vero il viceversa: esistono funzioni invertibili che non sono monotòne (sapete trovarne un esempio?). Invece, nel caso di funzioni continue definite in un intervallo, la stretta monotonia è una condizione necessaria e sufficiente di invertibilità. La dimostrazione è conseguenza del Teorema del valore intermedio.

COROLLARIO 4.5. *Sia f una funzione continua in $[a,b]$. Allora f è strettamente monotòna se e solo se f è invertibile.*

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua ed invertibile, allora è anche strettamente monotòna. Supponiamo per assurdo che non lo sia, allora esisterebbero $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$ tali che $x_1 < x_2 < x_3$ per cui o $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_3) < f(x_2)$ oppure $f(x_1) > f(x_2)$ e $f(x_3) > f(x_2)$. Supponiamo di essere nel primo caso (l'altro si tratta in modo analogo) e scegliamo η tale che $\max\{f(x_1), f(x_3)\} < \eta < f(x_2)$. Applicando il teorema del valore intermedio agli intervalli $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$ si ottiene che esistono $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ e $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ per cui $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \eta$ che contraddice l'ipotesi di invertibilità di f. $\square$

Se si sostituisce l'ipotesi di "f strettamente monotona" con "f non strettamente monotona" la conclusione non è più vera. L'esempio più banale che si può pensare è quello di una funzione costante.

Teorema di Weierstrass. Un'altra proprietà fondamentale di una funzione continua f definita in un intervallo $[a,b]$ è l'*esistenza del (valore) massimo e del (valore) minimo.*

TEOREMA 4.6. Teorema di Weierstrass. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esistono $x_0, x_1 \in [a,b]$ tali che $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ per ogni $x \in [a,b]$.*

Perseveriamo con la buona abitudine di cercare controesempi che mostrino il ruolo delle ipotesi del Teorema.

Controesempio 1. *f non è continua.* Se non è richiesta la continuità della funzione, è facile costruire casi di non esistenza di massimo/minimo. Ad esempio consideriamo $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Chiaramente $\inf\limits_{[-1,1]} f(x) = 0$, ma $f(x) \neq 0$ per ogni x. Analogamente si possono costruire casi in cui non c'è valore massimo.

Controesempio 2. *$I = (a,b)$ (intervallo aperto).* Anche in questo caso si possono trovare molti esempi che mostrano che le conclusioni del Teorema non sono vere. Ad esempio, $f(x) = x^2$ in $(-1,1)$ non ammette massimo (l'estremo superiore è 1), oppure $g(x) = \sin x$ in $(0, \pi/2)$ non ammette né massimo né minimo (l'estremo superiore è 1 e quello inferiore è 0). Si noti che in entrambi questi esempi, quello che si vorrebbe essere punto di massimo/minimo è uno degli estremi dell'intervallo, che però non appartiene ad I visto che l'intervallo è considerato aperto.

Controesempio 3. *I illimitato.* L'esempio più facile è $f(x) = x$ per $x \in \mathbb{R}$ che non ammette né massimo né minimo. Esistono anche funzioni *limitate* in domini illimitati che non ammettono né massimo né minimo, ad esempio, $f(x) = \arctan x$.

Se si combinano insieme il Teorema del valore intermedio ed il Teorema di Weierstrass si può dimostrare la seguente affermazione.

COROLLARIO 4.7. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'insieme immagine $f([a, b])$ è un intervallo chiuso e limitato.*

5. Gli intervalli incapsulati: *"divide et impera"*

Come abbiamo già detto nella presentazione naïf dei numeri reali, i fatti fondamentali che accettiamo come assiomi sono

> Postulato degli intervalli incapsulati. *Per ogni successione di intervalli $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ chiusi e limitati che siano incapsulati, cioè tali che $I_{n+1} \subset I_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste sempre almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 \in I_n$ per ogni n.*
>
> Assioma di Archimede. *Per ogni numero reale a, esiste un numero naturale n più grande di a: in simboli,*
> $$\forall\, a \in \mathbb{R}, \qquad \exists\, n \in \mathbb{N}, \qquad \text{tale che} \quad a \le n.$$

Si ricordi che una delle conseguenze dell'assioma di Archimede è

$$x \le \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \le 0.$$

Daremo ora le dimostrazioni del Teorema del Valore Intermedio e del Teorema di Weierstrass a partire dal seguente risultato.

TEOREMA 5.1. *Sia $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ una successione di intervalli tali che*

(i) $I_{n+1} \subset I_n$ (cioè $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$) per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$.

Allora, esiste un unico $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$, cioè $a_n \le x_0 \le b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x_0$.

Il Teorema indica che se la successione degli intervalli incapsulati ha la proprietà aggiuntiva che la lunghezza $|I_n| = b_n - a_n$ è infinitesima per $n \to +\infty$, l'intersezione degli I_n (non vuota per il Postulato degli Intervalli Incapsulati) è costituita da un solo elemento.

Dimostrazione del Teorema 5.1. La proprietà (i) implica $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ per il Postulato degli Intervalli Incapsulati; resta da dimostrare che tale intersezione è composta da un solo elemento. Siano $x_0, x_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ con $x_0 \leq x_1$. Allora $a_n \leq x_0 \leq x_1 \leq b_n$ per ogni n. Da questa relazione segue che $0 \leq x_1 - x_0 \leq b_n - a_n$. Dato che la successione $b_n - a_n$ è infinitesima, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $0 \leq x_1 - x_0 \leq b_n - a_n < \varepsilon$ per ogni n sufficientemente grande. In definitiva, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $0 \leq x_1 - x_0 < \varepsilon$, da cui segue $x_0 = x_1$, che conclude la prima parte del Teorema.

Inoltre, dato che $a_n \leq x_0 \leq b_n$, si ha anche $0 \leq x_0 - a_n \leq b_n - a_n \to 0$ per $n \to \infty$, quindi $a_n \to x_0$ per $n \to \infty$. Per b_n, basta notare che $b_n = a_n + (b_n - a_n) \to x_0 + 0 = x_0$. □

Divide et impera. Per dimostrare i Teoremi useremo sempre la strategia del *Divide et Impera.* Il punto chiave è definire una successione di intervalli incapsulati $[a_n, b_n]$ di misura $b_n - a_n$ infinitesima per $n \to +\infty$. Tipicamente, costruiremo la successione di intervalli I_n, scegliendo un primo intervallo opportuno $I_0 = [a, b]$, poi prendendo il punto intermedio dell'intervallo $\frac{a+b}{2}$ e scegliendo (secondo un criterio che dipende da caso a caso) come intervallo I_1 una delle due metà di I_0. Iterando il procedimento otterremo una successione di $I_n = [a_n, b_n]$ tale che

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}, \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

cioè soddisfacente le ipotesi del Corollario 5.1.

Dimostrazione del Teorema del valore intermedio (Teorema 4.1). Supponiamo $f(a) < f(b)$ e $\eta \in (f(a), f(b))$. Se $f(b) < f(a)$, si può ragionare in modo simile. Come I_0 scegliamo l'intervallo di partenza $[a, b]$ e consideriamo il punto intermedio $\frac{a+b}{2}$. Procediamo come segue:

(i) se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \eta$, siamo arrivati alla conclusione;
(i) se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \eta$, poniamo $a_1 = a$ e $b_1 = \frac{a+b}{2}$;
(ii) se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \eta$, poniamo $a_1 = \frac{a+b}{2}$ e $b_1 = b$.

In questo modo o siamo giunti alla conclusione, o abbiamo costruito un intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$ tale che $f(a_1) < \eta < f(b_1)$ e $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Iteriamo il procedimento: scegliamo il punto $\frac{a_1+b_1}{2}$, calcoliamo $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ e procediamo come sopra.

Così facendo, o si è dimostrata la conclusione dopo un numero finito di passi, o si è costruita una successione di intervalli incapsulati $I_n = [a_n, b_n]$ tale che $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Applicando il Corollario 5.1, deduciamo che esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0.$$

Per la scelta di a_n, b_n, si ha $f(a_n) < \eta < f(b_n)$ per ogni n. Dato che f è continua in x_0 e $a_n, b_n \to x_0$, per $n \to \infty$ si deduce $f(x_0) \leq \eta \leq f(x_0)$, cioè $f(x_0) = \eta$. $\square$

Dimostrazione del Teorema di Weierstrass (Teorema 4.6). Sia Λ l'estremo superiore di $\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Per ora non sappiamo se Λ sia finito o no.

Poniamo $I_0 = [a, b]$. Dividiamo I_0 in due parti uguali, tramite il punto medio $\frac{a+b}{2}$. In almeno uno dei due sottointervalli $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ e $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ l'estremo superiore della funzione f è ancora uguale a Λ. Battezziamo il sottointervallo con questa proprietà I_1 e i suoi estremi con a_1 e b_1. Nel caso in cui entrambi gli intervalli vadano bene ne scegliamo uno a nostro piacere. Iteriamo il procedimento, dividendo il sottointervallo tramite il suo punto medio. In questo modo, otteniamo una successione di intervalli incapsulati $I_n = [a_n, b_n]$ tali che $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Applicando il Teorema 5.1, deduciamo che esiste x_1 tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_1$. Vogliamo a questo punto mostrare che Λ è finito e, inoltre, $f(x_1) = \Lambda$.

La funzione f è continua in x_1, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_1) - \varepsilon < f(x) < f(x_1) + \varepsilon$ per ogni $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$. Fissato ε, e di conseguenza δ, scelgo $n \in N$ tale che $I_n \subset (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$. Allora

$$f(x) < f(x_1) + \varepsilon \qquad \forall\, x \in I_n, \tag{9}$$

che esprime il fatto che $f(x_1) + \varepsilon$ è un maggiorante di $\{f(x) : x \in I_n\}$. Dato che $\sup\{f(x) : x \in I_n\} = \Lambda$ per costruzione, ne segue che Λ è finito, che $f(x_1) \leq \Lambda$ e che $\Lambda \leq f(x_1) + \varepsilon$. Ma, in quest'ultima relazione, ε può essere scelto arbitrariamente, quindi

$$0 \leq \Lambda - f(x_1) \leq \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Perciò $\Lambda = f(x_1)$ e la dimostrazione è completa. $\square$

Si noti che, sebbene la costruzione porti a determinare un singolo punto di massimo, ce ne potrebbero essere anche molti altri! In effetti, ad ogni passo, nella scelta del sottointervallo ci può essere libertà di scelta, nel caso in cui in entrambi i sottointervalli l'estremo superiore della funzione f sia ancora uguale a Λ.

Per concludere, utilizziamo la strategia del *divide et impera* per dimostrare l'esistenza di estremo superiore ed inferiore (risultato concettualmente del tutto indipendente dai concetti di continuità di funzioni reali di variabile reale).

Ricordiamo che il valore $\Lambda \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di $E \subset \mathbb{R}$ se

(i) Λ è un maggiorante di E, cioè per ogni $y \in E$, si ha $y \leq \Lambda$;

(ii) Λ è il più piccolo dei maggioranti, cioè se L è un maggiorante di E, allora $\Lambda \leq L$.

Teorema di esistenza dell'estremo superiore. *Se $E \neq \emptyset$ è limitato superiormente, allora esiste $\Lambda = \sup E \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia $a \in E$ (E non è vuoto) e sia b un maggiorante di E (E è limitato superiormente). Indichiamo con I_0 l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e prendiamo il punto intermedio $\frac{a+b}{2}$. Allora $I_1 := [a_1, b_1]$, dove

(i) se $\frac{a+b}{2}$ è un maggiorante di E, poniamo $a_1 = a$ e $b_1 = \frac{a+b}{2}$,
(ii) se $\frac{a+b}{2}$ non è un maggiorante di E, poniamo $a_1 = \frac{a+b}{2}$ e $b_1 = b$.

In entrambi i casi in $I_1 = [a_1, b_1]$ c'è almeno un elemento di E e b_1 è un maggiorante di E. Iterando il procedimento, otteniamo la solita successione di intervalli incapsulati con $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Quindi, sempre per il Corollario 5.1, esiste Λ tale che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \Lambda$. Dato che $b_n \geq y$ per ogni $y \in E$, la stessa proprietà vale al limite: $\Lambda \geq y$ per ogni $y \in E$. Inoltre, per costruzione, ci sono elementi di E arbitrariamente vicini a Λ, quindi anche la condizione (ii) è soddisfatta. $\square$

CAPITOLO 2

Derivate, derivate e derivate

Prima di definire rigorosamente il concetto di derivabilità, prendiamoci il tempo di discutere un paio di punti di vista che indicano quale sia il significato di questo nuovo oggetto matematico: la derivata.

La derivata come velocità. Consideriamo un punto che si muova lungo l'asse y con posizione $y = f(t)$ all'istante t Se la funzione f è affine, ossia $f(t) = At+B$, si parla di moto uniforme. La velocità A è il rapporto tra la distanza percorsa nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ e la durata di questo intervallo:

$$A = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Il moto è *uniforme* perchè la velocità è costante e, di conseguenza, in intervalli di tempo uguali, vengono percorse distanze uguali.

Se il moto non è uniforme, la quantità $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ esprime la velocità media del punto nell'intervallo di tempo $[t_0, t]$. Se la velocità media tende ad un limite finito per $t \to t_0$, il valore del limite è detto velocità (istantanea):

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Se il limite non esiste, la velocità istantanea non è definita.

Un esempio semplice è il moto di un corpo in caduta libera, cioè sottoposto alla sola forza di gravità. Sperimentalmente, la distanza percorsa al tempo t da un corpo, lasciato cadere da fermo al tempo $t = 0$, è proporzionale a t^2; si rappresenta quindi con una funzione della forma

$$y = f(t) = at^2 \qquad (a > 0).$$

La velocità v all'istante t si ottiene quindi calcolando

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{at^2 - at_0^2}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} a(t + t_0) = 2at_0.$$

Quindi la velocità di un corpo in caduta libera cresce in modo proporzionale al tempo.

Nello studio del moto di un punto è utile osservare anche la variazione di velocità. Il procedimento è simile al precedente. L'accelerazione media è il rapporto tra la variazione di velocità nell'intervallo di tempo $[t_0, t]$ e la durata dell'intervallo, cioè è data da

$(v(t)-v(t_0))/(t-t_0)$. L'accelerazione (istantanea) a è il limite dell'accelerazione media per $t \to t_0$

$$a(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}.$$

Nel caso di moto uniforme $f(t) = At + B$,

$$v(t) = A \qquad \forall\, t \qquad \Rightarrow \qquad a(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{A-A}{t-t_0} = 0,$$

cioè l'accelerazione è nulla; nel caso del corpo in caduta libera $f(t) = at^2$,

$$v(t) = 2at \qquad \forall\, t \qquad \Rightarrow \qquad a(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{2at-2at_0}{t-t_0} = 2a,$$

cioè il moto è *uniformemente accelerato.*

La derivata come approssimazione lineare. In generale, supponiamo di esaminare l'evoluzione di una quantità (la posizione di un punto in movimento, la temperatura dell'acqua sul fuoco, o altro. . .) descritta all'istante t, dal numero reale $y = f(t)$. Fissiamo un istante iniziale t_0 e misuriamo il valore di $y = f(t_0)$. Per controllare quello che succederà da t_0 in poi, dobbiamo studiare la variazione di f, cioè la quantità

$$\Delta f(t;t_0) := f(t) - f(t_0).$$

Se la funzione f è costante, non c'è evoluzione: $\Delta f = 0$ per ogni scelta di t_0 e t. Se f è una funzione affine, cioè se $f(t) = At + B$ per qualche $A, B \in \mathbb{R}$, allora

$$\Delta f(t;t_0) = (At+B) - (At_0+B) = A(t-t_0) = A\Delta t,$$

dove $\Delta t = t - t_0$ rappresenta l'intervallo di tempo trascorso dall'istante iniziale t_0 a quello finale t. Come si vede, se f è affine, la funzione Δf è <u>lineare</u> nell'incremento Δt della variabile indipendente t, cioè Δf è proporzionale a Δt. La costante di proporzionalità è A ed è data da $A = \Delta f/\Delta t$.

Proviamo con un polinomio di secondo grado in t: $f(t) = at^2+bt+c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. In questo caso, scrivendo $t = t_0 + \Delta t$

$$\begin{aligned}\Delta f(t_0+\Delta t;t_0) &= \big[a(t_0+\Delta t)^2 + b(t_0+\Delta t) + c\big] - \big[at_0^2 + bt_0 + c\big] \\ &= (2at_0 + b)\,\Delta t + a\,(\Delta t)^2\,.\end{aligned}$$

Questa volta l'incremento Δf non è lineare in Δt, dato che compare il termine quadratico $A\,(\Delta t)^2$. Però Δf ha la gentilezza di decomporsi in due parti:

$$\Delta f(t_0+\Delta t;t_0) = (\text{termine lineare in } \Delta t) + (\text{resto})\,.$$

Quanto è grande il resto $a\,(\Delta t)^2$? Consideriamo un caso semplice: $a = 1, b = 0$, c qualsiasi, $t_0 = 1$. In questo caso:

$$f(t) = t^2 + c, \qquad \Delta f(1+\Delta t;1) = 2\Delta t + (\Delta t)^2,$$

la parte lineare è $2\Delta t$ ed il resto è $(\Delta t)^2$. Vediamo i valori di questi due termini per diverse scelte di Δt:

Δt	1	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$	$0,00001$
parte lineare: $2\Delta t$	2	$0,2$	$0,02$	$0,002$	$0,0002$	$0,00002$
resto: $(\Delta t)^2$	1	$0,01$	$0,0001$	$0,000001$	$0,00000001$	$0,0000000001$

Come si vede dalla tabella, sia il termine lineare che il resto diminuiscono per $\Delta t \to 0$ (sono infinitesimi). Ma c'è una differenza fondamentale: il resto $(\Delta t)^2$ diviene piccolo molto più rapidamente del termine lineare. Dunque è ragionevole approssimare, per $\Delta t \to 0$, l'incremento Δf tramite una funzione lineare in Δt:

$$\Delta f(t_0 + \Delta t; t_0) \approx (2at_0 + b)\,\Delta t \qquad \text{per} \quad \Delta t \to 0.$$

In generale, data f qualsiasi, se è possibile scrivere l'incremento Δf nella forma $\Delta f(t_0 + \Delta t; t_0) = A\Delta t + R$ con R che tende a zero più rapidamente del termine lineare $A\Delta t$ ha senso utilizzare l'approssimazione

$$\Delta f(t_0 + \Delta t; t_0) \approx A\Delta t \qquad \text{per} \quad \Delta t \to 0.$$

Tutte le volte che questa operazione è possibile, la funzione f si dice *derivabile* e il valore A è la *derivata prima* di f in t_0. La derivata, dunque, dà un'informazione sulla variazione Δf della funzione f quando la variabile indipendente t subisca una variazione Δt piccola.

Restano un paio di perplessità: che vuol dire la frase "il resto tende a zero più rapidamente del termine lineare"? E, in concreto, data una funzione f come stabilire se esiste e come calcolare il valore A? La risposta alla prima domanda permette magicamente di risolvere anche il secondo angoscioso quesito. Dire che il resto R tende a zero più rapidamente del termine lineare vuol dire richiedere che valga

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{R}{\Delta t} = 0.$$

In questo limite ci si trova di fronte ad una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, e la richiesta è che il resto R tende a zero tanto rapidamente da dominare l'effetto del termine infinitesimo a denominatore.

Dalla condizione sul resto si deduce un modo per calcolare A: se esiste A tale che $\Delta f = A\Delta t + R$ con R che soddisfa $\lim\limits_{\Delta t \to 0} R/\Delta t = 0$, allora, dividendo per Δt,

$$A = \frac{\Delta f}{\Delta t} - \frac{R}{\Delta t},$$

e passando al limite per $\Delta t \to 0$, si ha

$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t},$$

che dà una maniera rigorosa di definire la derivata di f e, allo stesso tempo, una maniera per calcolarne il valore.

1. Definizione di derivata

Riprendiamo il discorso da capo e mettiamo ordine nel *brainstorming* fatto fin qui.

DEFINIZIONE 1.1. Derivabilità. *Una funzione* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *è* derivabile in $x_0 \in (a,b)$ *se esiste finito il limite*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{10}$$

Se esiste, il limite si indica con $f'(x_0)$ *e si dice* derivata (prima) della funzione f in x_0. *Se* f *è derivabile in tutti i punti di* $[a,b]$, *si dice che* f è derivabile in $[a,b]$.

Per la derivata si usano anche altri simboli:

$$f' = \frac{df}{dx} = Df = \frac{dy}{dx} = \dot{y} = \cdots,$$

e il limite (10) può essere scritto in maniere equivalenti

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \cdots$$

Dato che la derivata f' dipende dal punto di derivazione, f' *è essa stessa una funzione*, il cui insieme di definizione è contenuto nell'insieme di definizione della funzione f (non è detto che i due domini di definizione coincidano).

Significato geometrico. Data una funzione $y = f(x)$, consideriamo il problema di determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$. L'idea è la seguente: dato un secondo punto $P = (x, f(x))$ sul grafico di f, per P_0 e P passa un'unica retta, detta retta secante. Se, muovendo P verso P_0, la retta secante

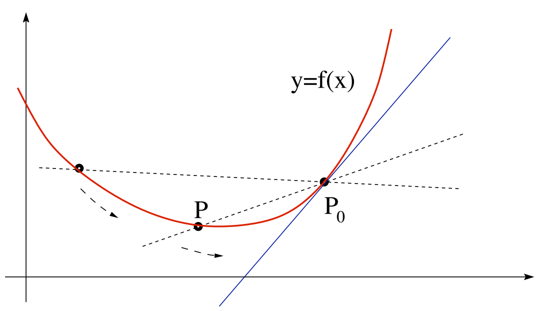

FIGURA 1. Il grafico di una funzione con tangente e secanti.

tende ad una posizione limite, tale retta limite è la retta tangente. Formuliamo ora, in maniera rigorosa, il processo geometrico di limite che abbiamo appena raccontato. Il coefficiente angolare della retta secante per P_0 e P è

$$\text{rapporto incrementale:} \qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Se la funzione f è derivabile in x_0, esiste il limite del rapporto incrementale e vale $f'(x_0)$, quindi il valore della derivata prima in x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

Osservazione 1.2. Determinare una derivata vuol dire fare (con successo) un limite: i limiti si fanno nei punti interni ad un intervallo di definizione. Negli estremi si fanno al più limiti sinistri o limiti destri. In punti isolati non si fanno neanche i limiti... Chi penserebbe di fare la tangente in un singolo punto?

La derivata è dunque il limite di una funzione opportuna, il rapporto incrementale. Vediamo come calcolare *esplicitamente* tale funzione derivata. Partiamo da alcuni casi semplici:

– se $f(x) = c \in \mathbb{R}$ per ogni x, si ha

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} 0 = 0;$$

– se $f(x) = x$, vale

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)-x}{h} = 1 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} 1 = 1;$$

– infine, se $f(x) = x^2$, si ha

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

Passiamo ora ad un esempio meno facile: sia $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \geq 0$. Il rapporto incrementale in $x \neq 0$ è

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\,\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Passando al limite per $h \to 0$ si ottiene

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad x > 0.$$

Nel punto $x = 0$ la funzione ha una *singolarità* (come è fatto il grafico di $\sqrt{x}$?): pur essendo definita e continua, si ha

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = +\infty.$$

Ecco altri due esempi di funzioni continue, ma non derivabili in $x = 0$:

$$f(x) = |x| \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Per la funzione f, la non derivabilità in 0 è dovuta al fatto che i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale esistono finiti ma non coincidono (il rapporto incrementale ha una discontinuità di salto in 0)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{|h|}{h}.$$

Nel grafico, un comportamento di questo genere si traduce nella presenza di un *punto angoloso.* Nel caso della funzione g, il rapporto incrementale ha l'espressione

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{h\sin(1/h) - 0}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Come si è già visto, questa funzione non ha limite (né destro né sinistro) per $h \to 0$. In termini di grafico (controllare di persona!), questa funzione ha delle variazioni sempre più rapide di pendenza man mano che ci sia avvicina ad $x = 0$.

Due conseguenze. Vediamo cosa si può dedurre in un soffio dalla derivabilità.

1. *Derivabilità ⇒ Continuità.* Se una funzione f è derivabile in x_0, allora è anche continua in x_0. Infatti la continuità della funzione f nel punto x_0 è equivalente all'affermazione $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0$, e, dato che

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,(x - x_0),$$

passando al limite per $x \to x_0$ si ottiene la conclusione.

2. *Equazione della retta tangente.* Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in [a, b]$ un punto in cui f è derivabile, la retta tangente è, per definizione, la retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$, il cui coefficiente angolare è pari a $f'(x_0)$

$$\text{equazione della retta tangente:} \qquad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Fissato il punto x_0, il polinomio di primo grado in x a secondo membro può essere visto come un'approssimazione della funzione f *vicino al punto* x_0.

Nel sostituire la funzione con la sua retta tangente l'errore R_{x_0}, è pari a

$$R(x; x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Per $x \to x_0$, l'errore che si commette tende a zero, cioè

$$\lim_{x\to x_0} R(x; x_0) = \lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big) = 0. \tag{11}$$

Ma (attenzione!) lo stesso è vero per qualsiasi altra retta per il punto $(x_0, f(x_0))$, infatti

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)\big) = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Quindi la proprietà (11) non è indicativa! Il fatto *fondamentale* è che per $R(x; x_0)$ vale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x; x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0. \tag{12}$$

Questa condizione è più restrittiva della precedente e, tra le funzioni affini, è verificata *solo* da quella che rappresenta la retta tangente ad f in x_0. In maniera equivalente, avremmo potuto dire che una funzione è derivabile in x_0 se esiste un valore $\ell \in \mathbb{R}$ per cui

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \ell(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Il valore ℓ è pari a $f'(x_0)$.

Prime formule di derivazione. Applichiamo ora la definizione per calcolare esplicitamente le derivate di alcune funzioni semplici.

Polinomi e potenze. Si è già visto che valgono le regole di derivazione

$$\big(c\big)' = 0, \qquad \big(x\big)' = 1, \qquad \big(x^2\big)' = 2x.$$

Per un generico polinomio di grado 2, $f(x) = ax^2 + bx + c$ si può procedere in modo analogo. Il rapporto incrementale è

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - ax^2 - bx - c}{h} = 2ax + b + h.$$

Quindi, passando al limite per $h \to 0$, si ottiene

$$\big(ax^2 + bx + c\big)' = \lim_{h\to 0}(2ax + b + h) = 2ax + b.$$

In modo simile è possibile derivare un qualsiasi polinomio. Calcoliamo prima di tutto la derivata di $f(x) = x^n$ dove $n \in \mathbb{N}$. Il rapporto incrementale si può scrivere come

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \cdots + x^{n-1},$$

dato che $x_1^n - x^n = (x_1 - x)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})$ per ogni $x_1, x \in \mathbb{R}$. Passando al limite per $x_1 \to x$, ciascuno dei termini tende a x^{n-1} e quindi, dato che si tratta di n termini, si ottiene

$$\big(x^n\big)' = nx^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

(per $n = 1, 2$ si ottengono le relazioni già note per x e x^2).

Una volta noto che è possibile calcolare esplicitamente la derivata di un qualsiasi polinomio, è naturale chiedersi se sia possibile fare lo stesso per funzioni razionali. Partiamo dal caso più semplice:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}}{x_1 - x} = \frac{x - x_1}{x_1 x (x_1 - x)} = -\frac{1}{x_1 x}.$$

Quindi passando al limite $x_1 \to x$, si ottiene la formula

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad (x \neq 0).$$

Allo stesso modo è possibile trattare funzioni $f(x) = \frac{1}{x^\beta}$ con $\beta \in \mathbb{N}$ $(x \neq 0)$:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{\frac{1}{x_1^\beta} - \frac{1}{x^\beta}}{x_1 - x} = \frac{x^\beta - x_1^\beta}{x_1^\beta x^\beta (x_1 - x)} = -\frac{x_1^{\beta-1} + x_1^{\beta-2} x + \cdots + x^{\beta-1}}{x_1^\beta x^\beta}.$$

Passando al limite per $x_1 \to x$, si ottiene

$$(14) \qquad \left(x^{-\beta}\right)' \equiv \left(\frac{1}{x^\beta}\right)' = -\frac{\beta}{x^{\beta+1}} \equiv -\beta x^{-\beta-1} \qquad \forall \beta \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \neq 0.$$

Vedremo più avanti come si possa calcolare la derivata di una generica funzione razionale.

Le formule (13) e (14) si possono sintetizzare nell'unica formula

$$(15) \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Dimostriamo che è possibile scegliere $\alpha \in \mathbb{Q}$ ottenendo ancora la formula (15). Supponiamo la funzione $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha = p/q$ con p e q interi $(q \neq 0)$. Consideriamo, per semplicità, il caso $p, q > 0$. Il rapporto incrementale è

$$\frac{x_1^\alpha - x^\alpha}{x_1 - x} = \frac{x_1^{p/q} - x^{p/q}}{x_1 - x}.$$

Ponendo $x_1^{1/q} = \xi_1$ e $x^{1/q} = \xi$, otteniamo

$$\frac{x_1^\alpha - x^\alpha}{x_1 - x} = \frac{\xi_1^p - \xi^p}{\xi_1^q - \xi^q} = \frac{\xi_1^{p-1} + \xi_1^{p-2}\xi + \cdots + \xi^{p-1}}{\xi_1^{q-1} + \xi_1^{q-2}\xi + \cdots + \xi^{q-1}}.$$

Passando al limite per $x_1 \to x$, cioè per $\xi_1 \to \xi$, si ottiene

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{x_1^\alpha - x^\alpha}{x_1 - x} = \lim_{\xi_1 \to \xi} \frac{\xi_1^{p-1} + \xi_1^{p-2}\xi + \cdots + \xi^{p-1}}{\xi_1^{q-1} + \xi_1^{q-2}\xi + \cdots + \xi^{q-1}} = \frac{p\, \xi^{p-1}}{q\, \xi^{q-1}} = \frac{p}{q}\, \xi^{p-q} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1},$$

cioè la formula (15) per α razionale positivo.

In generale si può dimostrare che (15) vale *per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$, cioè

$$(16) \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \neq 0.$$

Funzioni trigonometriche. Grazie alle formule di addizione è possibile scrivere i rapporti incrementali di $\sin x$ e $\cos x$ come

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}=\sin x\,\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\,\frac{\sin h}{h},$$
$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}=\cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\,\frac{\sin h}{h}.$$

Passando al limite per $h\to 0$ e ricordando che $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$ e $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$,

$$\big(\sin x\big)'=\cos x \qquad \text{e} \qquad \big(\cos x\big)'=-\sin x.$$

Esponenziale e logaritmo. Come ultimo esempio, consideriamo le funzioni e^x e $\ln x$. Nel caso dell'esponenziale, il rapporto incrementale è

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\,\frac{e^h-1}{h}.$$

Passando al limite per $h\to 0$ e usando il limite notevole $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$,

$$\big(e^x\big)'=e^x,$$

che esprime una proprietà notevole dell'esponenziale: *la derivata di e^x è e^x*. In effetti, la funzione e^x è l'unica funzione f che verifica l'equazione (differenziale) $f'=f$ e la condizione $f(0)=1$.

Il rapporto incrementale del logaritmo naturale si riscrive come

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)=\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right).$$

Quindi, ponendo $t=h/x$ (x è fissato) e usando il limite notevole $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\,\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{1}{x}.$$

2. Regole fondamentali di derivazione

Dalla definizione dell'operazione di derivazione, discendono alcune regole basilari che permettono di derivare una classe ampia di funzioni, a partire da una classe più ristretta di derivate note.

<u>Linearità.</u> *Dati $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e f,g derivabili, allora anche $\alpha f+\beta g$ è derivabile e*

$$\phi(x)=\alpha f(x)+\beta g(x) \quad\Longrightarrow\quad \phi'(x)=\alpha f'(x)+\beta g'(x).$$

Basta infatti osservare che il rapporto incrementale di ϕ si può riscrivere come

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=\alpha\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\beta\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h},$$

e passare al limite per $h \to 0$, applicando le proprietà note dei limiti.

Ad esempio, la derivata di un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ si può calcolare senza bisogno di passare per il limite del rapporto incrementale, ma semplicemente usando la linearità della derivazione e la formula $(x^k)' = kx^{k-1}$:

$$\begin{aligned}(p(x))' &= a_n(x^n)' + a_{n-1}(x^{n-1})' + \cdots + a_1(x)' + (a_0)' \\ &= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.\end{aligned}$$

<u>Derivata di un prodotto.</u> *Date f, g derivabili, allora anche fg è derivabile e*

$$\phi(x) = f(x)g(x) \quad \Longrightarrow \quad \phi'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Per dimostrare la formula, scriviamo il rapporto incrementale

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= f(x+h)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x),\end{aligned}$$

(si è aggiunto e sottratto a numeratore la quantità $f(x+h)g(x)$). Per $h \to 0$, la conclusione.

Ad esempio, per calcolare la derivata della funzione $\phi(x) = x \sin x$,

$$(x \sin x)' = x(\sin x)' + (x)' \sin x = x \cos x + \sin x,$$

avendo usato le formule di derivazione per x e $\sin x$.

<u>Derivata di un rapporto.</u> *Se f e g sono derivabili ($g(x) \neq 0$ per ogni x), allora anche il rapporto f/g è derivabile e vale la formula*

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Longrightarrow \quad \phi'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

La dimostrazione discende dalla struttura del rapporto incrementale per la funzione rapporto. Niente di sorprendente. Si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\ &= \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x+h)}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x) - f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right].\end{aligned}$$

Per $h \to 0$, si ottiene la conclusione.

OSSERVAZIONE 2.1. La formula di derivazione del rapporto è stata scritta nel caso in cui $g(x) \neq 0$ per ogni x. Ripercorrendo la dimostrazione ci si convince che basta supporre $g(x) \neq 0$ nel punto considerato. Infatti, se g è derivabile in x è anche continua nel punto, e quindi, c'è tutto un intorno I di x in cui g non si azzera.

Ad esempio, la derivata di $f(x) = \tan x$ è data da

$$\begin{aligned}\big(\tan x\big)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos x\,\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Anche per derivare funzioni razionali basta applicare la formula di derivazione del rapporto. Ad esempio,

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

<u>Derivata di una funzione composta.</u> *Siano g, h derivabili, allora la funzione composta $f = h \circ g$ è derivabile e vale la formula (in inglese, nota come* chain rule*)*

$$f(x) = h(g(x)) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = h'(g(x))\,g'(x). \tag{17}$$

Usare concretamente questa regola è molto più semplice di quel che possa sembrare. Vediamo, ad esempio, come calcolare la derivata di $f(x) = e^{x^2}$.

i. Riconosciamo la struttura di funzione composta:

$$f(x) = h(g(x)) \qquad \text{dove} \qquad g(x) = x^2, \quad h(s) = e^s.$$

ii. Dato che $g(x) = x^2$ e $h(s) = e^s$, si ha $g'(x) = 2x$ e $h'(s) = e^s$.

iii. Ora occorre fare il prodotto delle derivate, *calcolando h' in $s = g(x) = x^2$*:

$$D\big(e^{x^2}\big) = 2xe^{x^2}.$$

Analogamente, dato che $D(\sin x) = \cos x$ e $D(\sqrt{s}) = 1/(2\sqrt{s})$,

$$D\left(\sqrt{1+\sin x}\right) = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}.$$

Se la funzione è composta da più di due funzioni, si itera il procedimento:

$$D\left(h(g(f(x)))\right) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ad esempio,

$$D\left(\sqrt{1+\sin^2 x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot 2\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}.$$

Per dimostrare la formula (17), scriviamo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta h}{\Delta x} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \Delta g = 0, \\ \dfrac{\Delta h}{\Delta g}\,\dfrac{\Delta g}{\Delta x} & \text{se} \quad \Delta g \neq 0, \end{cases} \tag{18}$$

dove

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad\qquad \Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$
$$\Delta h = h(g(x_2)) - h(g(x_1)) \qquad\qquad \Delta g = g(x_2) - g(x_1).$$

Se, per x_2 vicino ad x_1, si ha $\Delta g \neq 0$, la conclusione segue da

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta g}\,\frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta g} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = h'(g(x_1))\, g'(x_1),$$

dato che $\Delta g \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Se in ogni intorno di x_1 ci sono punti per cui $\Delta g = 0$, la derivata di g in x_1 deve essere nulla (come si dimostra?), e quindi vale la conclusione, dato che entrambe le rappresentazioni di $\Delta f/\Delta x$ in (18) tendono a zero per $\Delta x \to 0$.

Applicando la formula (17) è possibile ottenere le formule per le derivate di

$$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad a^x \qquad (a > 0).$$

Per entrambe è utile osservare utilizzare la formula

$$a^b = e^{b \ln a} \qquad \forall\, a > 0,\ b \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Usando la formula (19),

$$D(x^\alpha) = D(e^{\alpha \ln x}) = \frac{\alpha}{x}\, e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha - 1} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$
$$D(a^x) = D(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a}\, \ln a = a^x\, \ln a \qquad \forall\, a > 0.$$

<u>*Derivata di una funzione inversa.*</u> Una conseguenza della formula di derivazione di funzione composta è la formula della derivata dell'inversa di una funzione. La prima domanda naturale da porsi è: *se la funzione f è invertibile e derivabile, lo è anche la funzione inversa?* La risposta è immediata se si pensa a come si ottiene il grafico della funzione inversa a partire da quello della funzione originale e se si ricorda il significato geometrico della derivabilità: la funzione f è derivabile in x se in tale punto il grafico ammette tangente e tale retta tangente *non è verticale* (quando la tangente al grafico è verticale, il rapporto incrementale tende ad ∞). Il grafico di f^{-1} si può ottenere da quello della f tramite un ribaltamento attorno alla bisettrice del primo e terzo quadrante. In questa operazione di ribaltamento, rette orizzontali diventano verticali e viceversa. Quindi un punto in cui la tangente al grafico di f è orizzontale (cioè $f'(x) = 0$), corrisponde, nel grafico di f^{-1}, ad un punto in cui la tangente è verticale e viceversa (Fig.2). Questo significa che:

Se $f'(x) \neq 0$, la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y = f(x)$.

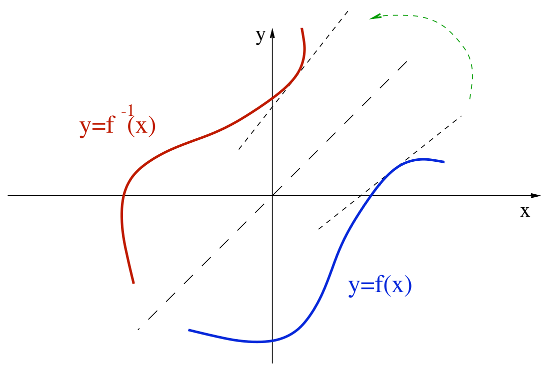

FIGURA 2. Una funzione e la sua inversa, con le relative tangenti.

Come calcolare la derivata della'inversa f^{-1}? Dato che $f(f^{-1}(x)) = x$ per ogni x, derivando membro a membro tramite la formula di derivazione di funzione composta,

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \Longrightarrow \qquad f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1.$$

Esplicitando $(f^{-1})'(x)$, si ottiene la formula di derivazione della funzione inversa

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{20}$$

Verifichiamo questa formula, calcolando di nuovo la derivata della funzione $f(x) = \ln x$ (in precedenza la formula si è ottenuta in modo diverso). In questo caso

$$\begin{cases} f(t) = e^t \\ f^{-1}(x) = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) = e^t \\ f'(f^{-1}(x)) = e^{\ln x} = x \end{cases} \Rightarrow \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Consideriamo le inverse delle funzioni trigonometriche e calcoliamone le derivate. Dato che $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$ per $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$ per $t \in [0, \pi]$, si ha

$$\begin{cases} f(t) = \sin t \\ f^{-1}(x) = \arcsin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) = \cos t \\ f'(f^{-1}(x)) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \forall x \in (-1, 1),$$

$$\begin{cases} f(t) = \cos t \\ f^{-1}(x) = \arccos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) = -\sin t \\ f'(f^{-1}(x)) = -\sin(\arccos x) = -\sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \forall x \in (-1, 1).$$

Per quanto riguarda la funzione $\arctan x$, è utile ricordare che

$$D(\tan t) = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t.$$

Quindi

$$\begin{cases} f(t) = \tan t \\ f^{-1}(x) = \arctan x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) = 1 + \tan^2 t \\ f'(f^{-1}(x)) = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ultima, ma non ultima, la formula della derivata di $f^{-1}(x) = \log_a x$ con $a > 0$ qualsiasi:

$$\begin{cases} f(x) = a^x \\ f^{-1}(x) = \log_a x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) = a^t \ln a \\ f'(f^{-1}(x)) = a^{\log_a x} \ln a = x \ln a \end{cases} \Rightarrow \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

3. Derivate successive

L'operazione di derivazione porta da una funzione f ad una nuova funzione f'. E' naturale chiedersi se la funzione derivata f' sia a sua volta derivabile.

DEFINIZIONE 3.1. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile e sia $x \in [a, b]$. Se esiste finito*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}, \tag{21}$$

la funzione f è derivabile due volte in x*, il limite si indica con $f''(x)$ e si chiama* derivata seconda di f in x. *Come sempre, se f è derivabile due volte in tutti i punti dell'intervallo $[a, b]$, si dice che f è* derivabile due volte in $[a, b]$.

Per la derivata seconda si usano anche le notazioni

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = D^2 f = \frac{d^2 y}{dx^2} = \cdots ,$$

Analogamente, nel caso di una funzione derivabile due volte, è possibile domandarsi se esista la derivata terza f'''. Iterando il procedimento si può parlare di derivata $n-$esima, che si indica con $f^{(n)}$. Simboli equivalenti sono

$$f^{(n)} \equiv D^n f \equiv \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Qualche volta si indica la funzione f come la sua derivata $0-$esima: $f^{(0)} \equiv f$.

La maniera *operativa* di calcolare derivate successive è semplicemente di iterare le formule note per la derivazione. Ad esempio,

$$f(x) = x^3 + x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6x \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = 6.$$

Le derivate di ordine superiore al terzo della funzione $f(x) = x^3 + x$ esistono e sono tutte nulle. In generale, un polinomio p di grado n è infinitamente derivabile (cioè ammette derivate di qualsiasi ordine), e le sue derivate di ordine maggiore o uguale ad $n+1$ sono tutte nulle. Anche le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono infinitamente derivabili:

$$D(\sin x) = \cos x,\ D^2(\sin x) = -\sin x,\ D^3(\sin x) = -\cos x,\ D^4(\sin x) = \sin x$$
$$D(\cos x) = -\sin x,\ D^2(\cos x) = -\cos x,\ D^3(\cos x) = \sin x,\ D^4(\cos x) = \cos x.$$

Le derivate successive ripetono lo stesso schema in modo periodico, ossia

$$\begin{array}{ll} D^{2n-1}(\sin x) = (-1)^{n+1}\cos x, & D^{2n}(\sin x) = (-1)^n \sin x, \\ D^{2n-1}(\cos x) = (-1)^n \sin x, & D^{2n}(\cos x) = (-1)^n \cos x, \end{array} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pensando al caso di polinomi e funzioni trigonometriche, si potrebbe essere indotti a credere che tutte le funzioni siano infinitamente derivabili. Un esempio di funzione che sia derivabile due volte in un punto, ma non tre volte è $f(x) = x^{5/2}$. Infatti $f''(x) = \frac{15}{4}\sqrt{x}$ che, come sappiamo, non è derivabile in zero.

ESERCIZIO 3.2. *Se $f(x) = \cos x$, quanto vale l'espressione $f''(x) + f(x)$? E se, dato $\lambda \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{\lambda x}$, quanto vale $g''(x) - \lambda^2 g(x)$?*

Notazioni. Comunemente si usano le notazioni (qui I è un intervallo aperto e $k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} &C(I) \equiv C^0(I) := \{\text{funzioni continue in } I\} \\ &C^1(I) := \{\text{funzioni derivabili in } I \text{ e con } f' \in C(I)\} \\ &C^k(I) := \{\text{funzioni derivabili } k \text{ volte in } I \text{ e con } f^{(k)} \in C(I)\} \\ &C^\infty(I) := \{\text{funzioni infinitamente derivabili in } I\}. \end{aligned}$$

4. Il Teorema di Lagrange

Dato che il rapporto incrementale è determinato dai valori della funzione in due punti distinti, esso riflette proprietà della funzione "in grande". Invece, la derivata, che si ottiene con un procedimento di limite, riflette solo proprietà "in piccolo". E' molto utile poter dedurre proprietà *globali* della funzione (cioè "in grande") a partire da proprietà *locali* (cioè "in piccolo") date dalla derivata prima della funzione. Lo strumento più utile per questa operazione è il *teorema di Lagrange* (o *teorema del valor medio del calcolo differenziale*).[1]

Graficamente il Teorema di Lagrange afferma che data una funzione f continua nell'intervallo chiuso $[x_1, x_2]$ e derivabile nell'intervallo aperto (x_1, x_2), la retta passante per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ (detta retta secante) è parallela alla retta tangente

[1] Nei testi americani, spesso il Teorema di Lagrange è denominato "mean value theorem of differential calculus" o "intermediate value theorem".

al grafico nel punto $(\xi, f(\xi))$ per almeno un valore $\xi \in (x_1, x_2)$. Dato che il coefficiente angolare della secante è

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

per questo valore intermedio ξ vale la relazione $f'(\xi) = [f(x_2) - f(x_1)]/[x_2 - x_1]$.

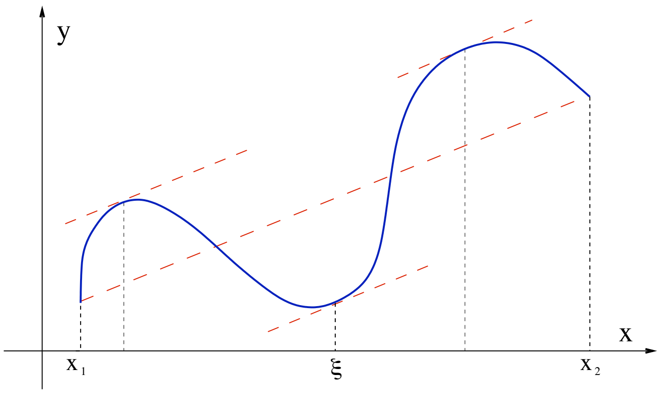

FIGURA 3. Il teorema di Lagrange

TEOREMA 4.1. Teorema di Lagrange. *Sia f continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2). Allora esiste $\xi \in (x_1, x_2)$ tale che*

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

La tesi del Teorema equivale ad affermare che esiste $\theta \in (0, 1)$ per cui

$$f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Le due formulazioni sono equivalenti dato che il punto intermedio ξ può sempre essere scritto nella forma $\xi = x_1 + \theta(x_2 - x_1)$ per $\theta \in (0, 1)$ opportuno. Oppure, sostituendo x_1 con x e x_2 con $x + h$, possiamo scrivere

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h), \qquad \theta \in (0, 1).$$

OSSERVAZIONE 4.2. Il punto di partenza nella definizione di derivabilità è dare solidità ad approssimazioni del tipo

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x \qquad \text{per} \quad x \approx x_0.$$

dove $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ e $\Delta x = x - x_0$. Il Teorema di Lagrange garantisce che $\Delta f = f'(\xi)\Delta x$ per qualche ξ compreso tra x e x_0. Quindi se si è disposti a pagare il prezzo di calcolare la derivata di f in un misterioso punto ξ, anziché in x_0, l'errore commesso è nullo (ma non si dimentichi che ξ dipende da x e da x_0).

Controesempio 4.3. *"Datemi un punto (interno) di non derivabilità, e vi darò un controesempio."* Se la funzione f non è derivabile in tutti i punti dell'intervallo aperto (x_1, x_2), non è detto che valga la conclusione del Teorema di Lagrange: può capitare che nessuna parallela della secante che congiunge gli estremi del grafico sia tangente al grafico stesso. Consideriamo la funzione $f(x) = |x|$ nell'intervallo $[-1, 1]$. Questa funzione è derivabile per ogni $x \neq 0$ e si ha

$$D(|x|) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0, \\ +1 & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

ma, dato che

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 1}{2} = 0 \neq D(|x|) \qquad \forall x,$$

la conclusione del Teorema non vale.

Il Teorema di Lagrange è conseguenza del seguente risultato.

Teorema 4.4. Teorema di Rolle. *Sia ϕ continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2). Se $\phi(x_1) = \phi(x_2)$, allora esiste $\xi \in (x_1, x_2)$ tale che $\phi'(\xi) = 0$.*

Geometricamente, il Teorema di Rolle afferma che, se $\phi(x_1)$ e $\phi(x_2)$ coincidono allora il grafico di ϕ ha tangente orizzontale in un punto interno dell'intervallo (x_1, x_2).

Dimostrazione del Teorema 4.4. Sia $\ell = \phi(x_1) = \phi(x_2)$. Dato che la funzione ϕ è continua in $[x_1, x_2]$, per il Teorema di Weierstrass, esistono sia il massimo M che il minimo m di ϕ in $[x_1, x_2]$. Chiaramente, $m \leq \ell \leq M$.

Se $M = m$, deve essere $\phi(x) = M$ in tutto l'intervallo $[x_1, x_2]$, quindi $\phi'(x) = 0$ in tutti i punti dell'intervallo.

Se $M \neq m$, almeno uno dei due valori deve essere diverso da ℓ. Supponiamo che sia $M \neq \ell$ (l'altro caso si tratta in modo simile). Allora $M > \ell$ ed esiste $\xi \in [x_1, x_2]$ tale che $\phi(\xi) = M$. Inoltre visto che $\phi(x_1) = \phi(x_2) = \ell \neq M$, $\xi \neq x_1, x_2$, ossia $\xi \in (x_1, x_2)$. Dato che $\phi(x) \leq M = \phi(\xi)$ per ogni $x \in [x_1, x_2]$,

$$\frac{\phi(x) - \phi(\xi)}{x - \xi} \quad \begin{cases} \leq 0 & \forall\, x > \xi, \\ \\ \geq 0 & \forall\, x < \xi, \end{cases}$$

Passando al limite per $x \to \xi$ da destra e da sinistra e, sapendo che i limiti destro e sinistro esistono e coincidono, si ha

$$\phi'(\xi) = \lim_{x \to \xi^+} \frac{\phi(x) - \phi(\xi)}{x - \xi} \leq 0 \quad \text{e} \quad \phi'(\xi) = \lim_{x \to \xi^-} \frac{\phi(x) - \phi(\xi)}{x - \xi} \geq 0$$

da cui $0 \leq \phi'(\xi) \leq 0$, e quindi $\phi'(\xi) = 0$. □

Dimostrazione del Teorema 4.1. Definiamo la funzione (ausiliaria) ϕ

$$\phi(x) := f(x) - f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

che rappresenta la distanza verticale tra il punto $(x, f(x))$ del grafico della funzione e la retta secante passante per i suoi estremi. La funzione ϕ soddisfa le ipotesi di regolarità del Teorema di Rolle (cioè è continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2)). Inoltre

$$\phi(x_1) = f(x_1) - f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_1 - x_1) = 0,$$
$$\phi(x_2) = f(x_2) - f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = 0.$$

Quindi esiste un valore $\xi \in (x_1, x_2)$ tale che $\phi'(\xi) = 0$. Dato che

$$\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad x \in (x_1, x_2),$$

si deduce che

$$\phi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0,$$

cioè la conclusione. □

Conseguenze del Teorema di Lagrange. L'apparentemente innocuo Teorema di Lagrange è un'arma estremamente potente. Vediamo perché.

a. <u>*Funzioni monotòne.*</u> *Sia f derivabile in (a, b). Allora*

$$f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \qquad \Longrightarrow \qquad f \quad \text{strettamente crescente in } (a, b).$$

Infatti, supponiamo $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$ e siano x_1, x_2 in (a, b) tali che $x_1 < x_2$. Per il Teorema di Lagrange, esiste $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Dato che $f'(\xi) > 0$ per ipotesi, ne segue $f(x_2) > f(x_1)$.

Analogamente si dimostra che

$$f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \qquad \Longrightarrow \qquad f \quad \textit{strettamente decrescente in } (a, b).$$

Se invece dell'informazione $f'(x) > 0$ o $f'(x) < 0$, si ha l'informazione più debole $f'(x) \geq 0$ o $f'(x) \leq 0$, la conclusione va sostituita con le analoghe proprietà di monotonía deboli (nondecrescente/noncrescente).

Consideriamo, come esempio, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

e studiamone la monotonía. Da quanto si è appena detto, basta studiare il segno della derivata prima:

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

Dato che $f'(x)$ è strettamente positiva per $x < 0$ e strettamente negativa per $x > 0$, la funzione è crescente in $(-\infty, 0]$ ed è decrescente $[0, +\infty)$.

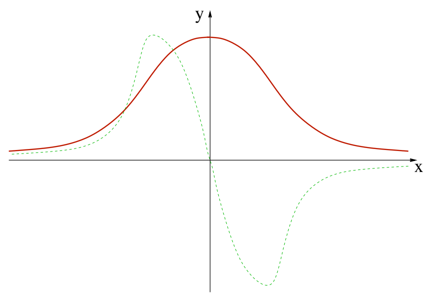

FIGURA 4. Grafico (qualitativo) di $1/(1+x^2)$ e della sua derivata

Vediamo un secondo esempio. Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$. Dato che la derivata di questa funzione è

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \qquad \forall x \neq 0,$$

concludiamo che la funzione f è decrescente... Se però calcoliamo la differenza del valore della funzione in 1 e in -1, otteniamo una contraddizione: $f(1) - f(-1) = 1 + 1 > 0$. Cosa sta succedendo? Bisogna stare attenti al fatto che le conclusioni sulla monotonìa delle funzioni seguono dal Teorema di Lagrange che vale su intervalli, cioè su insiemi "senza buchi" (si dicono *insiemi connessi*). Se togliamo dall'enunciato del Teorema l'ipotesi di "assenza di buchi", la conclusione non è più vera.[2] Nel caso della funzione $1/x$ stiamo applicando il Teorema all'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ che invece ha un buco: non contiene il punto 0. Ecco l'errore. Quindi la funzione $f(x) = 1/x$ NON è decrescente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$! Possiamo invece correttamente applicare i risultati sulla monotonìa alle semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ *separatamente* e concludere che $\frac{1}{x}$ è decrescente in $(-\infty, 0)$ ed è decrescente in $(0, +\infty)$.

OSSERVAZIONE 4.5. Cogliamo l'occasione per far notare una sottigliezza. Se $f'(x) > 0$ in un intervallo, necessariamente la funzione f è crescente. Cosa succede se $f'(x_0) > 0$ *nel solo punto* x_0? La possibilità di tracciare la retta tangente (che è crescente) suggerirebbe il fatto che la funzione f sia crescente, per lo meno in un intorno di x_0. Invece

[2] Da cui il noto modo di dire, attribuito a N. Barbecue, "Non tutti i Teoremi riescono col buco"...

questa affermazione è falsa! Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2\left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

Questa funzione è derivabile dappertutto e (c'è da dirlo? ...verificare!)

$$f'(x) = \begin{cases} 1/2 + \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & x \neq 0, \\ 1/2 & x = 0, \end{cases}$$

Quindi $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, ma in ogni intorno di $x = 0$ cadono punti in cui la derivata è negativa: si tratta dei punti in cui $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ è uguale a -1. Quindi *non è vero che f è crescente in un intorno dell'origine.* Il problema sta nel fatto che f' non è continua in 0. Se fosse stata continua, $f'(x_0) > 0$ avrebbe implicato $f'(x) > 0$ in un intorno di x_0 e quindi la monotonia in tale intorno.

b. *Funzioni a derivata nulla.* Una seconda conseguenza del Teorema di Lagrange:

$$f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in (a,b) \quad \Longrightarrow \quad f \quad \textit{è costante in } (a,b).$$

Infatti, per ogni coppia di valori $x_1, x_2 \in (a,b)$, esiste un valore ξ, compreso tra i due, per cui $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Dato che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$, si avrà, in particolare, $f'(\xi) = 0$, cioè

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) = f(x_1).$$

Si noti che, anche qui, ha un ruolo fondamentale il fatto che si lavori su intervalli. Ad esempio, la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1], \\ 1 & x \in [2,3], \end{cases}$$

è derivabile nel suo insieme di definizione $[0,1] \cup [2,3]$ e la sua derivata è ovunque nulla, ma la funzione si guarda bene dall'essere costante.

c. *Lipschitzianità di funzioni a derivata limitata.* Siano I l'intervallo aperto (α, β) e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I. Se f' è limitata in I, cioè se

$$\exists\, L > 0 \quad \text{tale che} \quad |f'(x)| \leq L \quad \forall\, x \in I.$$

allora dal Teorema di Lagrange segue

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)(x_2 - x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \qquad \forall x_1, x_2 \in (\alpha, \beta).$$

Quindi *una funzione derivabile con derivata limitata è lipschitziana.*

In particolare, se $f \in C^1(I)$ (sempre con $I = (\alpha, \beta)$), la derivata prima è continua in $[a,b]$ per ogni $[a,b] \subset I$ e quindi, per il Teorema di Weierstrass, è limitata in $[a,b]$. Se ne deduce che le funzioni in $C^1(I)$ sono **localmente lipschitziane**, cioè lipschitziane in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I.

d. Approssimazione lineare. Un'ulteriore applicazione interessante del Teorema di Lagrange è la stima dell'errore che si commette approssimando una funzione con la sua tangente in un punto. Sia f derivabile in $[a, b]$. Supponiamo conoscere il valore della funzione f e della sua derivata prima f' in un punto assegnato $x_0 \in [a, b]$. Si può pensare che il valore della funzione f in un qualsiasi altro punto sia dato *approssimativamente* dal valore della funzione lineare che definisce la tangente al grafico di f in x_0, cioè

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Questo corrisponde ad approssimare il grafico della funzione f con quello della sua tangente. *E' possibile stimare l'errore che commettiamo facendo questa approssimazione?* Consideriamo un esempio concreto. Vogliamo calcolare, in modo approssimato, il valore di $\sin(1/10)$. Dato che $1/10$ è ragionevolmente vicino a 0, possiamo pensare di approssimare la funzione $\sin x$ con la sua tangente in $x = 0$, cioè $\sin(x) \approx x$. Calcolando in $x = 0,1$ otteniamo l'approssimazione richiesta

$$\sin(0,1) \approx 0,1.$$

Il problema fondamentale è: quant'è grande l'errore commesso? In altri termini, è possibile stimare $|\sin(0,1) - 0,1|$?

Torniamo al caso generale. Supponiamo di lavorare con una funzione f che sia *derivabile due volte* nell'intervallo (a, b) e supponiamo che la derivata seconda f'' sia limitata, cioè esista $M > 0$ tale che $|f''(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$. Dato $x_0 \in [a, b]$, vogliamo stimare *il valore assoluto* della quantità

$$R(x; x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Applicando il Teorema di Lagrange otteniamo l'espressione

$$R(x; x_0) = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \big(f'(\xi) - f'(x_0)\big)(x - x_0),$$

dove ξ è compreso tra x e x_0. Applicando il Teorema di Lagrange a $f'(\xi) - f'(x_0)$

$$R(x; x_0) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0),$$

dove η è tra ξ e x_0. Quindi il valore assoluto dell'errore $R(x; x_0)$ è stimato da

$$|R(x; x_0)| = |f''(\eta)||\xi - x_0||x - x_0| \leq M|x - x_0|^2, \tag{22}$$

dove si è usata la limitatezza della derivata seconda f'' e il fatto che $|\xi - x_0| \leq |x - x_0|$. Nel caso-modello di $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ e $x = 1/10$, si ha $M = 1$, pertanto

$$\left|R\left(10^{-1}; 0\right)\right| \leq \frac{1}{100},$$

dove si è usato che $|f''(x)| = |-\sin x| \leq 1$ e $|x - x_0| = 1/10$. Quindi

$$0.09 < \sin(0.1) < 0.11$$

e. Derivabilità tramite il limite della derivata. In alcune situazioni, capita di lavorare con funzioni definite tramite formule diverse in diversi intervalli. Consideriamo come caso modello una funzione della forma

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < x_0, \\ \ell & x = x_0, \\ f_2(x) & x > x_0, \end{cases}$$

dove $\ell \in \mathbb{R}$, e f_1, f_2 sono funzioni note. La domanda naturale è se la funzione f sia derivabile nel punto x_0 oppure no. Come abbiamo già visto, la derivabilità implica la continuità, quindi, prima di tutto, deve essere verificata la condizione

$$\lim_{x \to x_0^-} f_1(x) = \ell = \lim_{x \to x_0^+} f_2(x).$$

Se questa condizione non è verificata, la funzione non è continua in x_0 e quindi, a maggior ragione, non è neanche derivabile in x_0. Nel caso in cui la funzione sia continua in x_0, per stabilirne la derivabilità occorre calcolare il limite del rapporto incrementale in x_0. Dato che la funzione f è definita da espressioni diverse a seconda che ci si trovi a destra o a sinistra di x_0, è sensato calcolare il limite del rapporto incrementale da destra e da sinistra.[3] Per definizione, *la funzione f è derivabile in x_0 se e solo se questi limiti esistono e coincidono*, ossia se e solo se

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f_1(x) - \ell}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f_2(x) - \ell}{x - x_0}.$$

La derivata in x_0 è il valore comune di questi due limiti.

In molte situazioni le f_1 e f_2 sono funzioni derivabili in tutto il loro insieme di definizione ed è possibile calcolare esplicitamente la funzione derivata. Invece di calcolare il limite del rapporto incrementale, può essere più semplice calcolare le derivate f_1' e f_2' nei rispettivi domini e calcolare il limite di queste funzioni derivate. Quale informazione dà questa procedura?

Proposizione 4.6. *Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, sia f continua in x_0 e derivabile in $(x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$ e supponiamo che esistano finiti il limite destro e sinistro $\lim\limits_{x \to x_0^\pm} f'(x) = \ell^\pm$. Allora f è derivabile in x_0 se e solo se $\ell^+ = \ell^-$.*

[3] Se esiste il limite destro del rapporto incrementale di una funzione f in x_0, si dice che *f è derivabile da destra in x_0*. Analogamente per il limite sinistro. Per indicare il limite destro/sinistro del rapporto incrementale (qualora esistano), cioè per indicare la *derivata destra/sinistra* si usa il simbolo $D_\pm f(x_0)$, o varianti.

Dimostrazione. Grazie al Teorema di Lagrange,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} f'(\xi_-) & \text{se } x < x_0, \qquad (x < \xi_- < x_0) \\ f'(\xi_+) & \text{se } x > x_0, \qquad (x_0 < \xi_+ < x) \end{cases}$$

dove $\xi_\pm$ sono punti opportuni tra x e x_0. Passando al limite per $x \to x_0$ da sinistra, dato che il limite sinistro della derivata f' esiste ed è uguale ad ℓ^-,

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} f'(\xi_-) = \ell^-.$$

Analogamente per il limite destro. Quindi, nelle ipotesi della Proposizione 4.6, i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale esistono e sono uguali, rispettivamente, a ℓ^+ e ℓ^-. A questo punto, la conclusione è evidente. □

Ad esempio, studiamo la derivabilità in 0 della funzione $f(x) = x|x|$. Dato che

$$x|x| = \begin{cases} -x^2 & x < 0, \\ x^2 & x \geq 0, \end{cases}$$

la funzione è certamente derivabile per $x \neq 0$ e

$$D\left(x|x|\right) = \begin{cases} -2x & x < 0, \\ 2x & x > 0. \end{cases}$$

Dato che $\lim\limits_{x\to 0^-} -2x = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0$, la funzione è derivabile in 0.

Consideriamo, invece, la funzione $e^{-|x|}$. In questo caso

$$e^{-|x|} = \begin{cases} e^x & x < 0, \\ e^{-x} & x \geq 0. \end{cases}$$

La funzione è derivabile per $x \neq 0$ e

$$D\left(e^{-|x|}\right) = \begin{cases} e^x & x < 0, \\ -e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

Dato che $\lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1 \neq -1 = \lim\limits_{x\to 0^+} -e^{-x}$, la funzione non è derivabile in 0.

La verifica della derivabilità in x_0 tramite il calcolo del limite della derivata a destra e a sinistra di x_0 è lecita *solo quando la derivata ammetta limiti destro e sinistro in* x_0. Quando questi limiti non esistano, il criterio non è più valido. La funzione può essere derivabile o può non esserlo. Ad esempio, consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Per $x \neq 0$, la derivata prima f' di questa funzione è

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Per $x \to 0$, il primo dei due termini è infinitesimo, mentre il secondo non ammette limite, quindi non esiste $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x)$. La Proposizione 4.6 non è applicabile. Per studiare la derivabilità in zero, calcoliamo direttamente il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h - 0} = \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

Quindi la funzione è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$.

Tabella delle derivate

funzione f	derivata prima f'	funzione f	derivata prima f'
costante	0	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
a^x	$a^x \ln a$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$