Sapienza, Università di Roma
Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"

Note di base di

Analisi Matematica

Parte terza

versione 1.2 (1 dicembre 2011)

Lamberto LAMBERTI
Corrado MASCIA

Indice

Capitolo 1. Analisi locale e analisi globale 1
1. Punti stazionari 1
2. Analisi al microscopio 5
3. Comportamento asintotico 6
4. Funzioni convesse 10
5. A caccia di massimi e minimi assoluti 13

Capitolo 2. Ordini di grandezza e la formula di Taylor 25
1. Verso lo zero e ad un passo dall'infinito 25
2. Il Teorema di de l'Hôpital 33
3. La formula di Taylor 38
4. Espressioni del resto 43

CAPITOLO 1

Analisi locale e analisi globale

Una proprietà di una funzione f è *locale* se dipende dal comportamento della funzione nell'intorno di un punto x. Continuità e derivabilità in x sono proprietà locali. Una proprietà di una funzione f è *globale* se vale in tutto l'insieme di definizione della f. Ad esempio le funzioni $e^x, \arctan x, x^3, \ldots$ sono funzioni globalmente monotòne crescenti e pertanto (globalmente) invertibili. Nella prima parte di questo capitolo approfondiamo l'uso della derivazione per determinare proprietà locali di funzioni: massimi/minimi relativi, punti di singolarità,... Torneremo più avanti sulle proprietà globali, concentrandoci sul problema di determinare massimi e minimi (assoluti) di una funzione assegnata.

1. Punti stazionari

Abbiamo già definito massimo e minimo di una funzione: data $f : D \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in D$ è punto di massimo di f se $f(x) \le f(x_0)$ per ogni $x \in D$. Il valore $f(x_0) = \max_{x \in D} f(x)$ è il massimo della funzione f in D. Analogo per i minimi.

L'esistenza di massimo e/o minimo è una proprietà globale della funzione. E' utile introdurre un analogo locale del concetto di massimo e di minimo.

Definizione 1.1. Massimo e minimo locale. *Il punto $x_0 \in D$ è un* punto di massimo locale *(o* relativo*) e il valore $f(x_0)$ è un* massimo locale *(o* relativo*) di f se esiste un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ del punto x_0 tale che $f(x_0)$ è il massimo di f in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:*

$$\exists\, \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad f(x) \le f(x_0) \qquad \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Analogamente per il minimo locale.

Un punto x_0 che sia o di massimo o minimo locale è un punto di estremo locale.

Per distinguere in modo più chiaro il massimo e il minimo dagli analoghi concetti locali, si parla di massimo globale (o assoluto) e di minimo globale (o assoluto). Dalla definizione segue immediatamente che se x_0 è punto di massimo globale, allora è anche punto di massimo locale. Il viceversa invece non è vero, come nel caso del grafico rappresentato in Figura 1. Per un esempio analitico, si può considerare la funzione

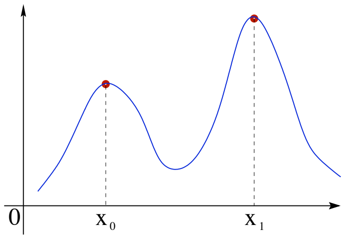

FIGURA 1. Il punto x_0 è di massimo locale, ma non globale; il punto x_1 è di massimo globale.

$f(x) = x^4 - x^2$. Dato che $f(0) = 0$ e $f(x) \leq 0$ per $x \in (-1, 1)$, il punto $x = 0$ è un punto di massimo locale, ma non è di massimo globale dato che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

DEFINIZIONE 1.2. *Sia $D \subset \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è* interno a *D se esiste un intorno di x_0 interamente contenuto in D, cioè se esiste $\delta > 0$ per cui $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$.*

Se una funzione f ha un massimo o un minimo locale in corrispondenza di un punto x_0 interno all'insieme di definizione e in cui la funzione è derivabile, necessariamente

$$f'(x_0) = 0.$$

Basta infatti pensare alla necessaria posizione orizzontale della retta tangente (Fig.2(a)). Per una dimostrazione analitica, sia x_0 un punto di massimo locale interno e supponiamo f derivabile in x_0. Dato che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \forall\, x_0 < x < x_0 + \delta, \\ \geq 0 & \forall\, x_0 - \delta < x < x_0, \end{cases}$$

Passando al limite per $x \to x_0$ si deduce $f'(x_0) = 0$.

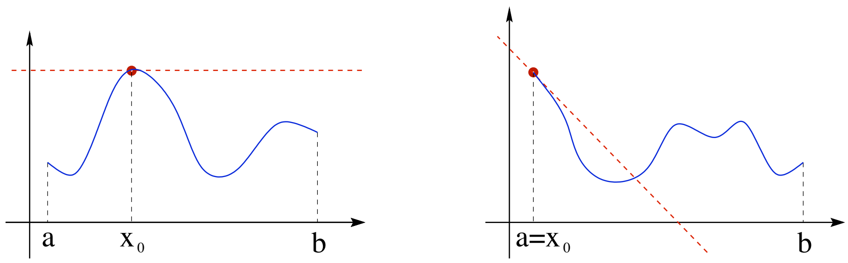

FIGURA 2. Se il punto di massimo locale è interno, la tangente è orizzontale. Se, invece, si trova sul bordo... non è detto!

Nel caso in cui il punto x_0 non sia interno al dominio, non è detto che la retta tangente sia orizzontale (Fig.2(b)). Conclusioni analoghe per i punti di minimo.

Pertanto, risolvere l'equazione $f'(x) = 0$ permette di determinare i possibili candidati a punti di minimo o massimo locale *interno* in cui f è *derivabile*. È comunque possibile che un estremo locale cada in un punto in cui la funzione non è derivabile; ad esempio $f(x) = |x|$ ha un minimo (globale) in $x = 0$ dove non ha retta tangente.

DEFINIZIONE 1.3. Punto stazionario. *Sia* $f : D \to \mathbb{R}$. *Un punto* x_0, *interno a* D, *tale che* $f'(x_0) = 0$ *si dice* punto stazionario[1] *(o* punto critico*) della funzione* f.

Equivalentemente, si può affermare che i punti critici di f sono i punti x per cui la tangente al grafico di f in $(x, f(x))$ è orizzontale.

ESERCIZIO 1.4. *Determinare i punti critici di* $f(x) = x^7 + 14x^4 + 1$.

Classificazione dei punti stazionari. Se x_0 è un punto di massimo o di minimo locale interno e f è derivabile in x_0, necessariamente x_0 è un punto critico, cioè $f'(x_0) = 0$. *Il viceversa non è vero*: esistono punti x_0 tali che $f'(x_0) = 0$, ma che non sono né punti di massimo locale, né punti di minimo locale. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente (quindi non ha né punti di massimo né punti di minimo in $\mathbb{R}$), ma $f'(x) = 3x^2$ si azzera nel punto $x = 0$.

Conoscendo il segno della derivata prima alla destra e alla sinistra del punto in questione, grazie al legame tra monotonia e segno di f', si può individuare quando un punto stazionario sia di massimo o di minimo. Supponiamo f derivabile in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ con $\delta > 0$, allora

$$f'(x) \begin{cases} \geq 0 & x_0 - \delta < x < x_0, \\ \leq 0 & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 \quad \text{punto di massimo locale.}$$

Analogamente, per il minimo, vale

$$f'(x) \begin{cases} \leq 0 & x_0 - \delta < x < x_0, \\ \geq 0 & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 \quad \text{punto di minimo locale.}$$

ESERCIZIO 1.5. *Determinare i punti critici della funzione* $f(x) = x^2(3x^2 - 8x + 6)$ *e dire quali di essi sono punti di massimo o di minimo.*

Soluzione. La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = 2x(3x^2 - 8x + 6) + x^2(6x - 8) = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x - 1)^2.$$

[1] Il termine *stazionario* è ereditato dalla cinematica. Se x è la posizione di un punto su cui agisce una forza conservativa con potenziale dato dalla funzione $f = f(x)$, allora l'accelerazione del punto è proporzionale a f'. Se il punto viene collocato a riposo nella posizione x_0 e $f'(x_0) = 0$, allora, dato che l'accelerazione (cioè la variazione di velocità) è nulla, il punto *stazionerà* nella posizione x_0 per ogni tempo successivo

I punti critici sono $x = 0$ e $x = 1$; il punto $x = 0$ è punto di minimo, mentre il punto $x = 1$ non è né di massimo né di minimo. Il grafico qualitativo della funzione f è in Figura 3.

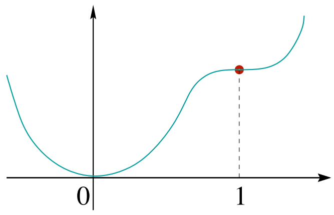

FIGURA 3. Il grafico di $f(x) = x^2(3x^2 - 8x + 6)$ dell'Esercizio 1.5.

Se x_0 è un punto critico di f, per riconoscere se f' cambia segno traversando x_0, basta considerare il segno di f'', qualora esista:

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \quad \text{punto di minimo locale;}$$

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \quad \text{punto di massimo locale.}$$

Si noti che si tratta solo di condizioni sufficienti: ad esempio, la funzione $f(x) = x^4$ ha un punto di minimo in 0, ma $f''(0) = 0$.

ESEMPIO 1.6. *Una raffinatezza per buongustai.* In genere, si immagina il grafico di una funzione vicino al punto di minimo x_0 con $f'(x) \leq 0$ per $x_0 - \delta < x < x_0$ e $f'(x) \geq 0$ per $x_0 < x < x_0 + \delta$. Esistono però anche situazioni in cui una funzione alla sinistra del punto di minimo non è decrescente e alla destra non è crescente. Scetticismo? Ecco un esempio:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 - \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

La funzione f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e

$$f(x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{e} \qquad f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Il punto $x = 0$ è punto di minimo globale, e quindi di minimo locale. Necessariamente $f'(0) = 0$ (come si può ottenere anche tramite il calcolo del limite del rapporto incrementale). La derivata prima di f nei punti $x \neq 0$ è

$$f'(x) = 2x\left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

quindi, per $x \approx 0$, si ha $f'(x) \approx \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, che assume valori sia positivi che negativi.

2. Analisi al microscopio

Nello studio dell'andamento qualitativo del grafico di una funzione, è interessante approfondire quello che succede in prossimità di certi punti significativi. Qui consideriamo come punti "significativi" quelli che corrispondono ad una delle seguenti situazioni:

(a) punti x_0 che non sono nell'insieme di definizione di f, ma che sono sul "bordo" (ad esempio, se $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, il punto $x_0 = a$, oppure se $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, $x_0 = c$);

(b) punti x_0 dell'insieme di definizione in cui f <u>non</u> è <u>continua</u>;

(c) punti x_0 in cui f è continua, ma <u>non</u> <u>derivabile</u>.

Nei casi (b) e (c) si parla talvolta di *punti di singolarità*.

Asintoti verticali. Sia nel caso (a) che nel caso (b), si calcola il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

Se il limite è $+\infty$ o $-\infty$, la funzione ha in $x = x_0$ un asintoto verticale. Lo stesso è vero

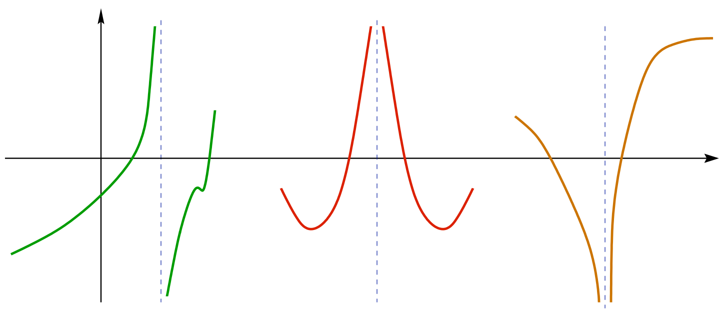

FIGURA 4. Alcuni esempi di asintoti verticali.

nel caso in cui sia il limite destro che il limite sinistro tendano a $+\infty$ o $-\infty$, ma con segni opposti. In generale, zeri del denominatore di una funzione razionale (che non siano anche zeri del numeratore), corrispondono a punti di asintoto verticale.

Ci sono situazioni più esotiche: il limite potrebbe non esistere oppure potrebbero esistere i limiti destro e sinistro, ma con valori diversi,... A voi individuare possibili esempi e corrispondenti grafici.

ESERCIZIO 2.1. *Studiare la funzione* $f(x) = \arctan(1/x)$ *vicino al punto* $x = 0$.

Punti angolosi e cuspidi. Consideriamo il caso (c), quindi supponiamo x_0 tale che la funzione f sia continua in x_0, ma non derivabile. Se esistono finiti i limiti destro e sinistro della derivata prima

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f'(x) = \ell^\pm,$$

dato che f non è derivabile in x_0, deve essere $\ell^+ \neq \ell^-$. Un punto di questo genere si chiama punto angoloso (o spigolo). Per disegnarlo correttamente è possibile tracciare le rette tangenti destra e sinistra, cioè le rette di equazione $y = f(x_0) + \ell^\pm(x - x_0)$.

Nel caso in cui i limiti destro e sinistro siano $\pm\infty$ si possono avere due situazioni differenti. Se entrambi sono $+\infty$ (o $-\infty$), cioè se

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f'(x) = +\infty \quad (-\infty),$$

il punto x_0 è un punto a tangente verticale. Se invece i limiti destro e sinistro sono $\pm\infty$, ma con segni opposti, il punto x_0 è una cuspide del grafico di f. Per un esempio di cuspide, si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$. In questo caso

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\infty.$$

Ovviamente sono possibili comportamenti analoghi a quelli descritti, ma misti: ad

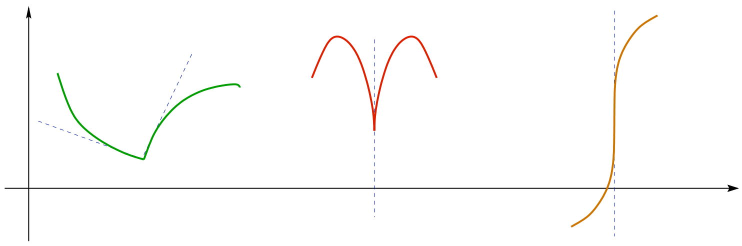

Figura 5. Da sinistra: un punto angoloso, una cuspide e un punto a tangente verticale.

esempio, una funzione può avere derivata prima che tende ad un valore dato da destra e che diverge da sinistra, o tutte le varianti che la mente è in grado di inventare.

3. Comportamento asintotico

Se la funzione f è definita in insiemi illimitati, è interessante studiarne il comportamento per $x \to \pm\infty$. Per fissare le idee, consideriamo una funzione f definita su una semiretta $[a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$. In questo caso si vuole stabilire cosa succeda per $x \to +\infty$, cioè determinare il *comportamento asintotico per $x \to +\infty$*. Considerazioni analoghe valgono per il caso di semirette del tipo $(-\infty, a]$, per $\mathbb{R}$, e, in generale, per domini illimitati.

La prima operazione sensata è il calcolo del limite per $x \to +\infty$. Se

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

si dice che la funzione f tende asintoticamente ad ℓ, oppure che f ha un asintoto orizzontale (di equazione $y = \ell$) per $x \to +\infty$. Il grafico della funzione f si avvicina alla retta di equazione $y = \ell$ per x sempre più grandi. Per un disegno più preciso, si può studiare il segno della funzione $f(x) - \ell$, che indica se il grafico della funzione f sia al di sopra o al di sotto dell'asintoto.

Esempio 3.1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} \qquad x \in [1, +\infty).$$

In questo caso,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2,$$

quindi la funzione ha l'asintoto orizzontale di equazione $y = 2$. Dato che

$$f(x) - \ell = \frac{2x^2}{x^2+1} - 2 = -\frac{2}{x^2+1} < 0,$$

quindi f tende a $y = 2$ dal basso. A voi il gusto di tracciare il grafico di questa funzione.

Invece, la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 \sin x}{x^2+1} \qquad x \in [1, +\infty),$$

non ha limite per $x \to +\infty$ e quindi non ha asintoto orizzontale.

Se il limite della funzione f esiste, ma è $+\infty$ o $-\infty$, evidentemente non c'è asintoto orizzontale. Che cosa si può dire in questo caso? È possibile che la funzione tenda ad un asintoto obliquo, ossia è possibile che esistano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - (ax + b)\big] = 0. \tag{1}$$

Questa proprietà indica che il grafico della funzione f si avvicina al grafico della retta $y = ax+b$ per $x \to +\infty$. Il problema è: *come determinare (qualora esistano) le costanti a e b?* Supponiamo che valga (1), allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - ax}{x} + a = a.$$

Una volta noto a, è possibile determinare b (qualora esista) calcolando

$$\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - ax\big] = b.$$

Ecco, quindi, le istruzioni per determinare la presenza di un asintoto obliquo:

i. calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: se il limite esiste finito, c'è un asintoto orizzontale (fine dello studio a $+\infty$), se il limite non esiste, non c'è né asintoto obliquo, né asintoto orizzontale (fine dello studio a $+\infty$), se il limite è $+\infty$ o $-\infty$ si va al punto (ii);

ii. calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x$: se il limite esiste finito, il suo valore è a e si va al punto (iii), se il limite non esiste o se vale $\pm\infty$, non c'è asintoto obliquo (fine dello studio a $+\infty$);

iii. calcolare $\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - ax\big]$: se il limite esiste finito, il suo valore è b, la funzione ha asintoto obliquo di equazione $y = ax + b$, se il limite non esiste o se vale $\pm\infty$, non c'è asintoto obliquo (fine dello sudio a $+\infty$).

Esempio 3.2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{3x+1} \qquad x \in [0, +\infty).$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{3x+1} = +\infty, \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{3x(x+1)} = \frac{1}{3} =: a, \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{3} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{3x+1} - \frac{x}{3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3-x}{3(3x+1)} = -\frac{1}{9} =: b. \end{aligned}$$

Quindi la funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$. Anche in questo caso, per disegnare un grafico più preciso, si può studiare il segno della funzione

$$f(x) - (ax+b) = \frac{x^2-1}{3x+1} - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) = -\frac{8}{9(3x+1)} < 0 \qquad \forall\, x > -\frac{1}{3}.$$

La differenza è negativa, quindi la funzione tende all'asintoto dal basso.

Dopo il punto (i), se esiste finito $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$, allora a è uguale al valore di questo limite e si può proseguire direttamente dal punto (iii). Se invece il limite di f' non esiste, bisogna necessariamente seguire il procedimento esposto sopra. Ad esempio, per $f(x) = x + \dfrac{\sin(x^2)}{x}$, si ha

$$f'(x) = 1 + 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2},$$

che non ammette limite per $x \to +\infty$, ma è facile vedere che la funzione ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ di equazione $y = x$.

Esercizio 3.3. *Sia* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *con* p *polinomio di grado* k *e* q *polinomio di grado* h*. Dimostrare che:*
(i) f *ha un asintoto orizzontale se e solo se* $k \leq h$*;*
(ii) f *ha un asintoto obliquo, non orizzontale, se e solo se* $k = h + 1$*.*

Altri profili asintotici. Il caso dell'asintoto obliquo è solo una situazione molto particolare: può capitare che una funzione tenda asintoticamente ad una funzione, che non sia un polinomio di primo grado. Consideriamo, ad esempio,

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 2}.$$

Grazie all'algoritmo di divisione di polinomi, possiamo riscrivere questa funzione come

$$f(x) = x^2 + 2x + 4 + \frac{9}{x - 2}.$$

Da questa espressione è immediato vedere che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big[f(x) - (x^2 + 2x + 4)\big] = 0,$$

e quindi il grafico di f tende asintoticamente alla parabola $y = x^2 + 2x + 4$.

Riconsideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 1} \qquad x \in [1, +\infty).$$

Dato che $\frac{2x^2}{x^2+1} \to 2$ per $x \to +\infty$, è sensato immaginare che questa funzione "assomigli" alla funzione $f(x) = 2 \sin x$ per $x \to +\infty$. Calcoliamo la differenza tra $f(x)$ e $2 \sin x$ e vediamo se è infinitesima:

$$\left| \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 1} - 2 \sin x \right| = \frac{2\,|\sin x|}{1 + x^2} \leq \frac{2}{1 + x^2} \to 0 \qquad \text{per} \quad x \to +\infty.$$

Quindi

$$f(x) = \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 1} = 2 \sin x + h(x) \qquad \text{con} \qquad \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0.$$

In generale se siamo in grado di riscrivere la funzione f nella forma

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

con g funzione di cui si conosce il grafico e $h \to 0$ per $x \to \infty$, il grafico della funzione f tende verso quello della funzione g. Non esiste alcuna strategia generale per determinare una decomposizione di questo genere.

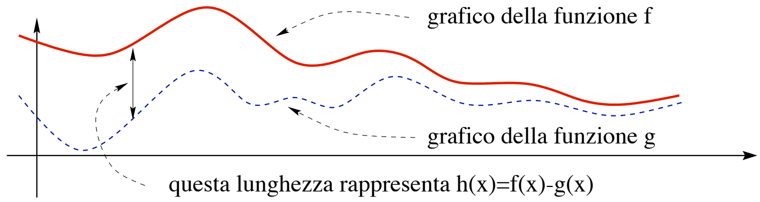

FIGURA 6. Il grafico di f con $f(x) = g(x) + h(x)$ e h infinitesima per $x \to +\infty$.

4. Funzioni convesse

Come già detto, ripetuto ed usato ampiamente, il segno della derivata prima dà informazioni relative alla monotonia della funzione f. Quale ruolo gioca, invece, il segno della derivata seconda? Partiamo da una definizione.

DEFINIZIONE 4.1. *Una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è* convessa in $[a, b]$ *se*

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall\, x, y \in [a, b] \quad \forall\, t \in (0, 1). \tag{2}$$

Una funzione per cui valga la disuguaglianza opposta si dice concava*.*

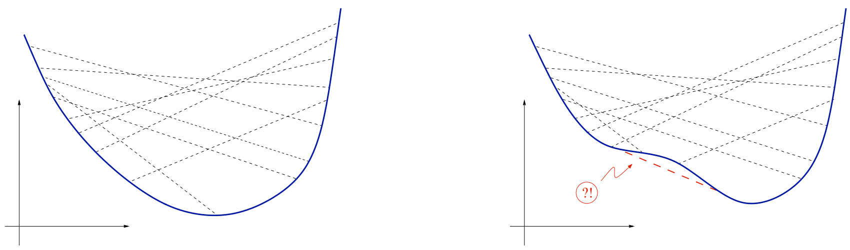

FIGURA 7. Una funzione convessa ed una non convessa.

Dalla definizione segue che se f è concava, allora $-f$ è convessa, e viceversa. Quindi studiare la convessità è sufficiente per comprendere anche la concavità.

OSSERVAZIONE 4.2. Esiste una maniera diversa di introdurre il concetto di convessità. Un sottoinsieme E del piano è convesso se scelta una qualsiasi coppia di punti P e Q appartenenti ad E, il segmento che li congiunge è interamente contenuto in E. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è convessa in $[a, b]$ se l'insieme $E := \{(x, y) : y \ge f(x)\}$, composto dai punti che si trovano sopra il suo grafico (detto epigrafico) è un insieme convesso. Le due definizioni sono comunque equivalenti (sapete dimostrarlo?).

Cerchiamo di capire il significato geometrico della condizione (2). Fissiamo $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$ con $\bar{x} < \bar{y}$. Per $t \in (0, 1)$, definiamo $z(t) := t\bar{x} + (1-t)\bar{y} \in (\bar{x}, \bar{y})$. Scriviamo la retta che passa per $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ e $(\bar{y}, f(\bar{y}))$:

$$\Phi(x) = f(\bar{x}) + \frac{f(\bar{y}) - f(\bar{x})}{\bar{y} - \bar{x}}(x - \bar{x}),$$

e calcoliamo questa funzione in $z(t)$. Dato che

$$\begin{aligned}\Phi(z(t)) &= f(\bar{x}) + \frac{f(\bar{y}) - f(\bar{x})}{\bar{y} - \bar{x}}(t\bar{x} + (1-t)\bar{y} - \bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + \frac{f(\bar{y}) - f(\bar{x})}{\bar{y} - \bar{x}}(1-t)(\bar{y} - \bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + (f(\bar{y}) - f(\bar{x}))(1-t) = tf(\bar{x}) + (1-t)f(\bar{y}),\end{aligned}$$

la condizione (2), si può riscrivere come

$$f(z(t)) \leq \Phi(z(t)) \qquad \forall\, x, y \in [a, b] \quad \forall\, t \in (0, 1).$$

Questa scrittura ha un interpretazione in termini di grafico immediata: *una funzione f è convessa, se per ogni scelta di x e y, il grafico di f giace al di sotto della retta secante che congiunge i punti $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ nell'intervallo di estremi x e y.*

Esercizio 4.3. *Se f e g sono due funzioni convesse in $[a, b]$, allora una tra $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ è convessa. Sapete dire quale?*

Proposizione 4.4. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è convessa in $[a, b]$ se e solo se*

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \tag{3}$$

per ogni x, y, z tali che $a \leq x < z < y \leq b$.

La dimostrazione della formula (3) si ottiene riscrivendo in termini di rapporti incrementali la formula (2). I dettagli sono lasciati alla buona volontà del lettore.

La proprietà (3) può essere interpretata graficamente in termini di monotonía delle pendenza delle secanti: fissato y, la funzione

$$\phi(x) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

è crescente in x. Quando la funzione è derivabile, questa proprietà diviene una richiesta di monotonia della derivata prima f'. Nel caso in cui la funzione f sia derivabile due volte, la monotonía della funzione f' può essere tradotta in termini di segno della derivata seconda f''.

Teorema 4.5. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Allora*

(i) se f è derivabile una volta, la funzione f è convessa in $[a, b]$ se e solo se f' è non decrescente in $[a, b]$;

(ii) se f è derivabile due volte, la funzione f è convessa in $[a, b]$ se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Per le funzioni concave, vale un risultato analogo sostituendo a "f' non decrescente" la frase "f' non crescente" e a "$f'' \geq 0$" la frase "$f'' \leq 0$".

Dal Teorema 4.5(i) discende un'altra interpretazione geometrica della convessità: *se la funzione f è derivabile e convessa, il suo grafico è interamente al di sopra di ogni retta tangente ad esso.* Infatti, scriviamo la differenza tra f e la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$

$$R(x; x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

con l'obiettivo di dimostrare che se f è convessa, la funzione $R(x; x_0)$ è positiva. Applichiamo il Teorema di Lagrange e riscriviamo $R(x; x_0)$ come

$$R(x; x_0) = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \big(f'(\xi) - f'(x_0)\big)(x - x_0).$$

Se $x > x_0$ allora $\xi > x_0$ e quindi, essendo f' crescente, $f'(\xi) > f'(x_0)$. Ne segue che il termine a destra è positivo perché prodotto di termini positivi. Se $x < x_0$ allora $\xi < x_0$ e, sempre per la monotonía di f', $f'(\xi) < f'(x_0)$. Questa volta i due termini sono entrambi negativi, ma comunque il loro prodotto è positivo.

Dimostrazione del Teorema 4.5. (i) Supponiamo che f sia convessa, allora vale la (3). Quindi, passando al limite per $z \to x^+$ si ottiene

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Analogamente, passando al limite nella (3) per $z \to y^-$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y).$$

Ne segue che $f'(x) \leq f'(y)$ per ogni $x \leq y$.

Viceversa, supponiamo che la funzione f' sia non decrescente e dimostriamo la (2) studiando la funzione differenza

$$F(t) := tf(x) + (1 - t)f(y) - f(tx + (1 - t)y), \qquad t \in [0, 1],$$

con x, y fissati. Consideriamo il caso $y < x$ (l'altro è analogo). Calcolando la derivata di F e applicando il Teorema di Lagrange, si deduce che esiste $\xi \in (y, x)$ tale che

$$F'(t) = f(x) - f(y) - f'(tx + (1 - t)y)(x - y) = \Big[f'(\xi) - f'(tx + (1 - t)y)\Big](x - y).$$

Dato che, per $t \in [0, 1]$, il punto $tx + (1 - t)y$ descrive l'intervallo $[y, x]$, esiste t^* tale che $t^*x + (1 - t^*)y = \xi$. Inoltre, dato che f' è non decrescente, $f'(tx + (1 - t)y) \leq f'(\xi)$

per $t \in [0, t^*]$ e $f'(tx + (1-t)y) \geq f'(\xi)$ per $t \in [t^*, 1]$. Perciò:

$$F'(t) \geq 0 \quad \text{per} \quad t \in [0, t^*] \qquad \text{e} \qquad F'(t) \leq 0 \quad \text{per} \quad t \in [t^*, 1].$$

Perciò il minimo globale della funzione F è assunto in uno degli estremi $t = 0$ o $t = 1$ e, dato che $F(0) = F(1) = 0$, $F(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0, 1]$, cioè la formula (2). □

ESERCIZIO 4.6. *Sia f una funzione convessa e derivabile in (a, b). Se esistono $x_0, x_1 \in (a, b)$ con $x_0 \neq x_1$ tali che $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$, che cosa si può dedurre sulla funzione f?*

DEFINIZIONE 4.7. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile due volte. Se x_0 è tale che f'' cambia segno in x_0 (cioè è negativa da una parte e positiva dall'altra), allora x_0 si chiama* punto di flesso *della funzione f.*

Grazie al Teorema 4.5, se f'' ha segno opposto alla destra e alla sinistra di x_0, necessariamente x_0 è un punto di flesso.

ESEMPIO 4.8. Consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$. La sua derivata seconda è $f''(x) = -\sin x$, quindi tutti punti della forma $x = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di flesso.

Per la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si ha

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},$$

e quindi i punti di flesso di f sono $x = \pm 1/\sqrt{3}$. La funzione f è convessa in $(-\infty, -1/\sqrt{3})$ e in $(1/\sqrt{3}, +\infty)$ e concava in $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

La convessità è utile per determinare l'esistenza di minimi di una funzione. Infatti, vale la seguente implicazione

$$f \quad \text{convessa}, \quad f'(x_0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 \quad \text{punto di minimo globale}.$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio. Analogamente, per le funzioni concave ed i punti di massimo. Chiaramente se la convessità è solo locale (cioè in un intorno del punto x_0), x_0 è punto di minimo locale.

ESERCIZIO 4.9. *Dimostrare la seguente implicazione*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \textit{convessa} \quad \Rightarrow \quad f \quad \textit{continua in} \quad (a, b).$$

5. A caccia di massimi e minimi assoluti

Problema 1. Abbiamo già considerato il problema di determinare il cilindro di volume $V = k =$ costante con superficie totale S minima, con l'obiettivo (malcelato) di diventare ricchi grazie all'uso della matematica, applicando il risultato alla costruzione di scatole di fagioli, o, più in generale, di confezioni cilindriche con minima spesa di materiali. La speranza si era presto infranta quando ci siamo resi conto che per via elementare non riuscivamo a determinare il minimo della funzione S, cioè a risolvere il problema (r =raggio della base del cilindro)

$$\text{determinare il minimo di } S(r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{k}{\pi r}\right) \qquad r > 0.$$

Torniamo al problema con la conoscenza delle derivate e studiamo la monotonìa di S:

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi\left(2r - \frac{k}{\pi r^2}\right) = \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{k}{2\pi}\right).$$

Perciò $S'(r) \geq 0$ se e solo se $r \geq r^*$ dove $r^* = (k/2\pi)^{1/3}$. Quindi la funzione S

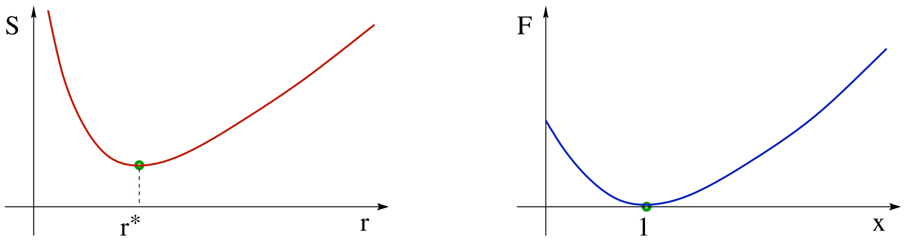

FIGURA 8. (a) Il grafico della funzione $S(r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{k}{\pi r}\right)$; (b) il grafico della funzione $F(x) = x^p - 1 - p(x-1)$, $p > 1$.

è decrescente in $(0, r^*)$ ed è crescente in (r^*, ∞). Ne segue che il punto di minimo richiesto esiste ed è proprio $r = r^*$ (Fig.8(a)). Problema risolto, corriamo in fabbrica!

Problema 2. Vogliamo dimostrare la disequazione

$$x^p - 1 \geq p(x-1) \qquad \forall p > 1, \quad \forall x \geq 0.$$

Fissiamo $p > 1$ e consideriamo la funzione

$$F(x) = x^p - 1 - p(x-1) \qquad x \geq 0.$$

Dato che $F'(x) = p(x^{p-1} - 1)$, $F'(x) < 0$ per $x \in (0,1)$ e $F'(x) > 0$ per $x \in (1, +\infty)$. Quindi la funzione F è decrescente in $[0,1)$ e crescente in $(1, +\infty)$ e $x = 1$ è un punto di minimo. Ne segue che $F(x) \geq F(1) = 0$, da cui la conclusione (Fig.8(b)).

Problema 3. Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ assegnati. Supponiamo di voler determinare $x \in \mathbb{R}$ tale che sia minima la quantità

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - x)^2. \tag{4}$$

Possiamo immaginare che i valori a_i provengano da misurazioni di un fenomeno sotto osservazione e che si stia cercando un valore medio per questi numeri, che minimizzi l'errore commesso misurato dal valore in (4). Consideriamo la funzione $F(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - x)^2$ e calcoliamone la derivata:

$$F'(x) = -2\sum_{i=1}^{n}(a_i - x) = -2\left[\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} x\right] = 2n\left[x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right].$$

La funzione F è decrescente a sinistra di $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ e crescente a destra. Il valore

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

è il punto di minimo (e coincide con la media aritmetica di $a_1, \dots, a_n$).

Esercizio 5.1. *Dati* $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, *determinare* x *che minimizzi* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - x)^2$ *dove* $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ *sono pesi (positivi) assegnati.*

I problemi che abbiamo appena presentato mostrano alcune tra le miriadi di situazioni in cui si pone il problema: data una funzione f, come determinarne massimo e minimo globali (qualora esistano)? Proviamo ad affrontare il problema in generale.

Supponiamo di lavorare con una funzione f definita nell'intervallo $[a, b]$ e continua. Grazie al teorema di Weierstrass, l'ipotesi di continuità garantisce l'esistenza del massimo e del minimo assoluti. Abbiamo già visto che le soluzioni di $f'(x) = 0$ (cioè i punti critici di f) permettono di determinare i possibili candidati a punti di minimo o massimo locale *interno derivabile.* Chiaramente, è possibile che un estremo locale cada in un punto in cui la funzione non è derivabile. Quindi, la strategia per individuare il massimo ed il minimo di una funzione continua in $[a, b]$ è la seguente:

- ⋆ determinare l'insieme $\mathcal{S}$ dei punti stazionari in (a, b);
- ⋆ determinare l'eventuale insieme $\mathcal{N}$ dei punti in cui f non è derivabile;
- ⋆ calcolare la funzione in $\mathcal{S}$, in $\mathcal{N}$ e negli estremi dell'intervallo a e b.
- ⋆ individuare il più grande e il più piccolo tra i valori calcolati.

Esercizio 5.2. *Determinare il massimo ed il minimo assoluti di*

$$f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x \qquad x \in [0, 2].$$

Soluzione. La funzione f è derivabile dappertutto. Per determinare i punti singolari:

$$f'(x) = (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 7)e^x = (x^2 - 3x + 2)e^x = (x - 2)(x - 1)e^x.$$

Quindi $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ o $x = 2$. L'insieme dei punti critici *interni* è $\mathcal{S} = \{1\}$. Dato che $f(0) = 7 < f(2) = e^2 < f(1) = 3e$, si ha

$$\min_{x\in[0,2]} f(x) = f(0) = 7, \qquad \max_{x\in[0,2]} f(x) = f(1) = 3e,$$

che è quanto richiesto dall'esercizio.

Spesso è utile conoscere il massimo del modulo di una funzione assegnata f, cioè risolvere il problema

$$\text{data } f : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{continua,} \quad \text{calcolare } \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

In questo caso, si può procedere come detto sopra, o, alternativamente, determinare il massimo ed il minimo della funzione f in $[a,b]$ e poi sfruttare la relazione (evidente?)

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max\left\{ \Big|\max_{x\in[a,b]} f(x)\Big|, \Big|\min_{x\in[a,b]} f(x)\Big| \right\}.$$

Esercizio 5.3. *Calcolare* $\max\{|x^2 - 1| \, : \, x \in [-1,2]\}$.

Nel caso in cui si studi una funzione f continua, ma definita su un dominio illimitato (ad esempio, $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$), le ipotesi del Teorema di Weierstrass non sono soddisfatte e quindi non è detto che esistano il massimo ed il minimo della funzione. Comunque ha senso domandarsi: *quanto valgono l'estremo superiore e l'estremo inferiore? Nel caso in cui siano finiti, si tratta di massimo o di minimo?* La strategia per risolvere questo problema è simile a quanto appena visto. Il punto che bisogna modificare è quello relativo al calcolo della funzione negli estremi dell'intervallo. In questo caso almeno uno degli estremi dell'intervallo sarà $+\infty$ o $-\infty$ e le espressioni $f(+\infty)$ e $f(-\infty)$, in generale, non hanno senso, ma vanno sostituite con $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. Vediamo la procedura negli esercizi che seguono.

Esercizio 5.4. *Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione* $f(x) = e^{x^2}$ *in* $\mathbb{R}$ *e dire se si tratta di massimo e minimo.*

Soluzione. L'estremo superiore è presto detto: dato che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, è chiaro che $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f = +\infty$. Che possiamo dire sull'estremo inferiore? Visto che la funzione f è continua su $\mathbb{R}$, esistono massimo e minimo di f in $[-M, M]$ per ogni scelta di $M > 0$. Quindi

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min\left\{ \min_{|x|\le M} f(x), \inf_{|x|>M} f(x) \right\}.$$

Inoltre, dato che $f(x) \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$, per M grande, $\min\limits_{|x|\le M} f(x) \le \inf\limits_{|x|>M} f(x)$. Non resta che cercare i punti di minimo relativo in $[-M, M]$. Derivando, $f'(x) = 2xe^{x^2}$ che si azzera se e solo se $x = 0$, quindi l'unico punto di minimo relativo è $x = 0$ che, per quanto detto, è anche minimo assoluto: $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} e^{x^2} = e^0 = 1$.

Esercizio 5.5. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua tale che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Dimostrare che la funzione f *ammette minimo assoluto su* $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.6. *Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione* $f(x) = e^{-x^2}$ *in* $\mathbb{R}$ *e dire se si tratta di massimo e minimo.*

Soluzione. La funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e la derivata vale $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. Quindi c'è un unico punto critico $x = 0$ in cui la funzione vale $f(0) = 1$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Confrontando i valori deduciamo che

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} e^{-x^2} = 0 \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-x^2} = f(0) = 1.$$

Dato che l'estremo superiore fa parte dell'insieme immagine, l'estremo superiore è massimo. Invece l'estremo inferiore non è minimo, perchè la funzione f è strettamente positiva.

Analogamente nel caso di funzioni continue definite in insiemi non chiusi, cioè $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ oppure $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, o varianti, non si applica il Teorema di Weierstrass. Anche in questi casi, per determinare l'estremo superiore/inferiore bisogna considerare i limiti agli estremi.

Concludiamo la Sezione, analizzando altri due problemi di massimo e minimo.

Un problema di statica: la puleggia di De L'Hôpital. Consideriamo gli assi cartesiani (x, y) posti in modo che l'asse y sia in verticale rispetto al suolo e che la forza di gravità sia direzionata nel verso delle y negative. Indichiamo con $O = (0, 0)$ e con $A = (a, 0)$ dove $a > 0$ è una lunghezza fissata. Nel punto O, fissiamo una corda di lunghezza b e all'estremità B di questa corda fissiamo una puleggia. Lasciamo pendere per fatti suoi la puleggia e fissiamo una seconda corda di lunghezza ℓ al punto A. Dopo aver fatto passare la seconda corda attraverso la puleggia (quindi facendola passare per il punto B) fissiamo un peso M all'altra estremità. La configurazione finale è disegnata in Figura 9. Il problema è: in quale punto (x, y) si posizionerà il peso M?

Qui stiamo supponendo che l'unica forza esterna che agisce sul sistema è la forza di gravità. Se, inoltre, supponiamo che il peso delle corde e della puleggia sia trascurabile rispetto al peso di M, e che non sia presente nessun tipo di attrito, il peso M si collocherà nella posizione più bassa possibile, cioè minimizzerà il valore y. Quest'affermazione discende dal principio seguente: *la posizione d'equilibrio (stabile) del sistema minimizza l'energia potenziale di* M. Dato che l'energia potenziale di M è della forma $Ay + B$ con $A > 0$, minimizzare l'energia potenziale equivale a minimizzare l'altezza y.

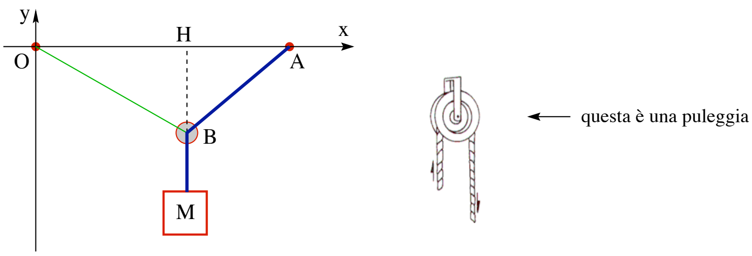

FIGURA 9. La puleggia di De L'Hôpital.

Riscriviamo per chiarezza i dati del problema:

$$\overline{OA} = a, \qquad \overline{OB} = b, \qquad \overline{AB} + \overline{BM} = \ell.$$

L'incognita è la posizione di $M = (x, y)$. Supponiamo inoltre $0 < b < a < \ell$. La soluzione del problema può essere divisa in due passi:

passo 1. assegnata la coordinata x di M, determinare la coordinata $y = f(x)$;

passo 2. calcolare (se esiste) il minimo della funzione f.

Da brave persone ordinate, partiamo dal primo passo. Indichiamo con H la proiezione ortogonale di M sull'asse x, cioè $H = (x, 0)$. Allora

$$y = -\left(\overline{HB} + \overline{BM}\right) = -\left(\overline{HB} + \ell - \overline{AB}\right) = \overline{AB} - \overline{HB} - \ell.$$

Si tratta ora di scrivere le lunghezze $\overline{AB}$ e $\overline{HB}$ in funzione di x. Basta usare il Teorema di Pitagora per ottenere:

$$\overline{HB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{b^2 - x^2}, \qquad \overline{AB} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{HA}^2} = \sqrt{b^2 - x^2 + (a - x)^2}$$

Quindi la funzione da studiare è

$$y = f(x) = \sqrt{b^2 - x^2 + (a - x)^2} - \sqrt{b^2 - x^2} - \ell \qquad x \in [0, b].$$

L'intervallo di variazione di x si deduce direttamente dal problema considerato.

Secondo passo: qual è la scelta di x che minimizza y? Dato che la funzione è continua in $[0, b]$ e l'intervallo è chiuso e limitato, il Teorema di Weierstrass ci assicura che il problema ha soluzione, ma non ci dà nessuna informazione su quale sia il punto di minimo. Implementiamo, quindi, la strategia proposta poche pagine fa.

Prima di tutto, notiamo che la funzione f non è derivabile nei punti in cui si azzera l'argomento di una delle due radici. Dato che $b < a$, il termine $b^2 - x^2 + (a - x)^2$ è sempre non nullo. La seconda radice $\sqrt{b^2 - x^2}$ si azzera per $x = \pm b$. Di questi due punti, $-b$ va scartato perché è fuori da $[0, b]$ e b è uno degli estremi dell'intervallo.

Determiniamo l'insieme $\mathcal{S}$ dei punti stazionari di f in $(0, b)$. Dato che

$$f'(x) = -\frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2 + (a-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

i punti stazionari $x \in (0, b)$ verificano

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2 + (a-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}},$$

e, passando ai quadrati,

$$\frac{a^2}{b^2 + a^2 - 2ax} = \frac{x^2}{b^2 - x^2}.$$

Ora ci vogliono un po' di conti: l'equazione precedente è equivalente a

$$2ax^3 - 2a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2ax^2(x-a) - b^2(x+a)(x-a) = 0.$$

Dividendo per $x - a \neq 0$,

$$2ax^2 - b^2x - ab^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = x_\pm := \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 + 8a^2b^2}}{4a}$$

Dato che $x_- < 0 < x_+ < b$ (verificare!), c'è un unico punto critico in $(0, b)$: $\mathcal{S} = \{x_+\}$.

Ricapitolando, la nostra strategia propone tre punti di minimo assoluto possibili: $0, x_+, b$. Per determinare chi di questi sia il punto di minimo bisognerebbe confrontare i tre valori $f(0)$, $f(x_+)$ e $f(b)$. Fattibile, ma non particolarmente semplice. Seguiamo una strada diversa. Dato che

$$f'(0) = -\frac{a}{a-b} < 0$$

il punto 0 non può essere di minimo relativo e dunque nemmeno di minimo assoluto! La lotta rimane tra x_+ e b. In b non possiamo ragionare come in 0 dato che la funzione f non è derivabile in b, quindi $f'(b)$ non ha senso. Non perdiamoci d'animo: dato che

$$\lim_{x \to b^-} f'(x) = \lim_{x \to b^-} -\frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2 + (a-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}} = +\infty$$

la funzione f è crescente in un intorno (sinistro) di b, quindi nemmeno b può essere il punto di minimo richiesto. Perfetto: resta un unico sopravvissuto x_+ che è il punto di

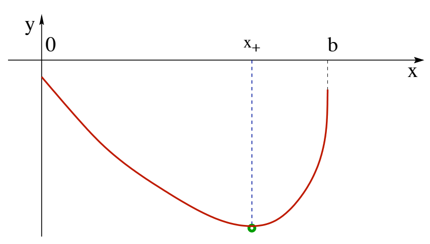

FIGURA 10. Il grafico della funzione f.

minimo cercato. Il peso M si collocherà nella posizione di coordinate $(x_+, f(x_+))$. In alternativa, per stabilire che x_+ è il punto di minimo assoluto, si sarebbe potuto anche notare che $f'' \geq 0$, quindi la funzione f è convessa e, necessariamente, il suo punto critico x_+ è di minimo assoluto.

Il principio di Fermat. Passiamo ora a considerare due problemi di *ottica geometrica* che si traducono nella ricerca del punto di minimo assoluto di certe funzioni. In quel che segue, considereremo un raggio di luce in maniera naïf: come un qualcosa che viaggia da un punto ad un altro, si riflette sugli oggetti, entra nell'occhio...

Il problema fondamentale è stabilire quale sia il tragitto percorso dal raggio per passare da un punto A ad un punto B. Il principio, proposto da Fermat, è il segunte: *il tragitto prescelto è quello che minimizza il tempo di percorrenza.* Se il raggio viaggia sempre nello stesso mezzo, la sua velocità v è costante, quindi minimizzare il tempo di percorrenza T equivale a minimizzare la lunghezza del percorso. Perciò il raggio percorre linee rette. Che succede in situazioni un po' più complicate?

Riflessione. Consideriamo un raggio di luce che parta dal punto $A = (0, a)$ e e che si diriga verso l'asse delle x dove immaginiamo collocato uno specchio. Il raggio viene riflesso nel punto $P = (x, 0)$ e da lì arriva nel punto $B = (b, c)$. I tragitti da A a P e da P a B sono percorsi lungo segmenti. Supponendo assegnati $a, b, c > 0$ e quindi assegnati i punti A e B, qual'è il punto P prescelto dal raggio luminoso?

Ad ogni scelta di $P = (x, 0)$, corrisponde un certo tempo di percorrenza $T = T(x)$. Il principio di Fermat afferma che il punto di riflessione $(x_0, 0)$ è tale che $T(x_0) = \min T(x)$. Bene, non resta che determinare l'espressione esplicita di $T = T(x)$ e trovare in quale punto sia assunto il minimo. Indicando con T_{AP} e T_{PB}, il tempo impiegato dal raggio per andare da A a P e da P a B rispettivamente, e con v la velocità della luce nel mezzo in considerazione,

$$T(x) = T_{AP}(x) + T_{PB}(x) = \frac{\overline{AP}}{v} + \frac{\overline{PB}}{v}.$$

Quindi, grazie al teorema di Pitagora,

$$T(x) = \frac{1}{v}\left(\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2}\right) \qquad x \in [0, b].$$

Dato che la funzione T è derivabile infinite volte, applicando la strategia per il calcolo di massimi e minimi assoluti, il punto di minimo x_0 sarà o 0, o b, o tale che $T'(x_0) = 0$. Cerchiamo quindi i punti critici di T. La derivata prima T' è esplicitamente data da

$$T'(x) = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}\right).$$

Essa si azzera se e solo se $x = x_* := ab/(a + c)$.

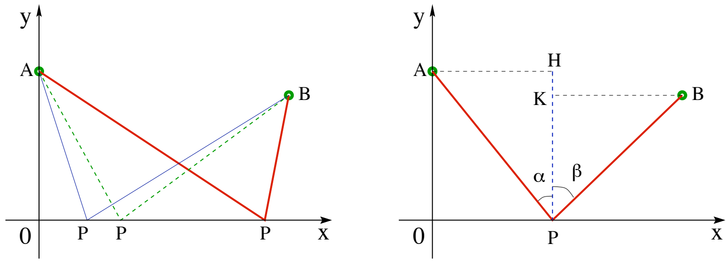

FIGURA 11. Quale sarà il punto P prescelto da un raggio riflesso in uno specchio? Quello che fa in modo che gli angoli di incidenza α e di riflessione β coincidano.

Invece di confrontare i valori di T per $x = 0, x_*, b$, si può notare che

$$T'(0) = -\frac{b}{v\sqrt{b^2+c^2}} < 0 \qquad \text{e} \qquad T'(b) = \frac{b}{v\sqrt{b^2+a^2}} > 0,$$

quindi nessuno dei due estremi dell'intervallo è di minimo. Pertanto il punto x_* è il punto di minimo assoluto.

Il punto di riflessione P è individuato da una condizione geometrica semplice. Sia α l'angolo, detto di *incidenza*, determinato dal segmento AP e dalla semiretta da P, perpendicolare all'asse x, contenuta nel semipiano $y > 0$, e sia β l'angolo, detto di *riflessione*, determinato dal segmento PB e dalla stessa semiretta di prima. Allora, indicando con H il punto di coordinate (x_*, a) e con K il punto di coordinate (x_*, c),

$$\tan\alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{PH}} = \frac{x_*}{a} = \frac{b}{a+c} \qquad \tan\beta = \frac{\overline{BK}}{\overline{PK}} = \frac{b-x_*}{c} = \frac{ab+bc-ab}{a+c}\,\frac{1}{c} = \frac{b}{a+c}$$

Quindi $\tan\alpha = \tan\beta$ e, dato che $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$, ne segue che $\alpha = \beta$. In definitiva, il principio di Fermat implica che *l'angolo di riflessione coincide con l'angolo di incidenza.*

Rifrazione. Cambiamo tipo di esperimento. Consideriamo un raggio luminoso che viaggi in due mezzi differenti in cui la sua velocità è v_+ e v_-. Per semplicità, supponiamo che il mezzo in cui la velocità è v_+ corrisponda alla regione di piano con $y > 0$ e quello in cui la velocità è v_- corrisponda a $y < 0$. Se un raggio parte da $A = (0, a)$ con $a > 0$ ed arriva a $B = (b, c)$ con $c < 0 < b$, che tragitto sceglie?

Esattamente come prima, utilizziamo il principio di Fermat. Indicando con T_{AP} e T_{PB}, il tempo impiegato dal raggio per andare da A a P e da P a B rispettivamente, il tempo impiegato per andare da A a B è

$$T(x) = T_{AP}(x) + T_{PB}(x) = \frac{\overline{AP}}{v_+} + \frac{\overline{PB}}{v_-}.$$

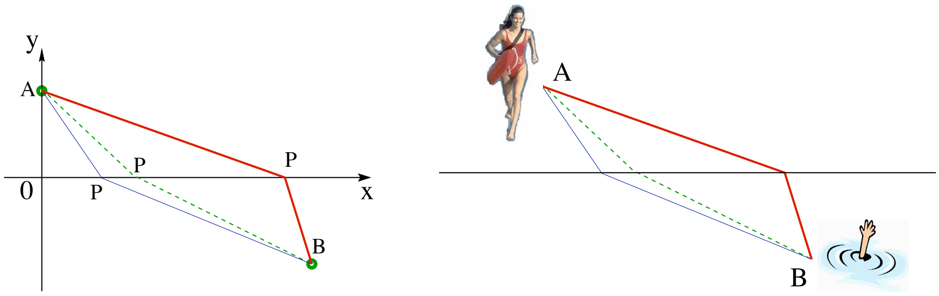

FIGURA 12. Quale percorso scegliere? Supponiamo che nel semipiano $y > 0$ ci sia la terra ferma e il mare nel semipiano $y < 0$. Nel punto A c'è la prestante bagnina di Baywatch pronta ad intervenire per salvare la vita di un affogando sito nel punto B. Sapendo che la soccorritrice quando corre sulla spiaggia va a velocità v_+ e quando nuota in mare va a velocità v_-, qual'è il percorso che le permette di soccorrere il malcapito nel minor tempo possibile?

e, di nuovo per il teorema di Pitagora,

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_+} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}{v_-} \qquad x \in [0, b].$$

Anche questa funzione è derivabile infinite volte in $[0, b]$. La sua derivata prima è

$$T'(x) = \frac{x}{v_+\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{b-x}{v_-\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}.$$

Quindi $T'(0) < 0 < T'(b)$ e anche in questo caso gli estremi non sono punti di minimo. Perciò il minimo è in $(0, b)$. Inoltre, con un po' di pazienza, si ottiene

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_+\,(x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{c^2}{v_-\,[(b-x)^2 + c^2]^{3/2}} > 0$$

Dato che la derivata seconda è (strettamente) positiva, la derivata prima T' è strettamente crescente, quindi esiste un unico x_* tale che $T'(x_*) = 0$ (si ricordi che $T'(0) < 0 < T'(b)$). Necessariamente x_* è il punto di minimo che andiamo cercando.

Come individuarlo? Per ora sappiamo solo che x_* è individuato in maniera univoca dalla relazione $T'(x_*) = 0$, cioè x_* è l'unico valore per cui

$$\frac{1}{v_+}\frac{x_*}{\sqrt{x_*^2 + a^2}} = \frac{1}{v_-}\frac{b - x_*}{\sqrt{(b-x_*)^2 + c^2}}. \tag{5}$$

Come nel caso della riflessione, ragioniamo in termini di angoli. Sia α, *angolo di incidenza*, l'angolo formato dal segmento AP con la semiretta verticale per P contenuta in $y > 0$, e sia β, *angolo di rifrazione*, l'angolo formato dal segmento PB con la semiretta verticale per P contenuta in $y < 0$. Se H e K sono le proiezioni di A e B

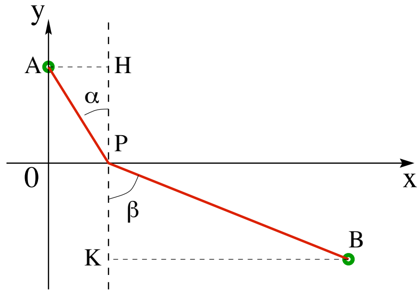

FIGURA 13. Gli angoli di incidenza e di rifrazione.

sulla retta $x = x_*$, i triangoli APH e BPK sono rettangoli e quindi

$$\sin\alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{AP}} = \frac{x_*}{\sqrt{x_*^2 + a^2}} \qquad \sin\beta = \frac{\overline{BK}}{\overline{BP}} = \frac{b - x_*}{\sqrt{(b - x_*)^2 + c^2}}.$$

Sostituendo nella formula (5), si deduce che il punto di rifrazione P è scelto in modo che valga

$$\frac{\sin\alpha}{v_+} = \frac{\sin\beta}{v_-}.$$

Tale relazione è nota come legge di rifrazione di Snell.

CAPITOLO 2

Ordini di grandezza e la formula di Taylor

1. Verso lo zero e ad un passo dall'infinito

Le funzioni con cui ci si trova a dover lavorare possono avere una struttura complicata, e anche molto. Se si è interessati al comportamento della funzione solo per determinati regimi, cioè per valori dell'incognita in opportune regioni, può bastare conoscere quali siano i termini dominanti all'interno della funzione. Ad esempio, se il valore $f(t)$ rappresenta la posizione di una particella all'istante t, si potrebbe essere interessati solo al comportamento della funzione f per valori grandi di t. Se $f(t) = e^t + \sin t$, è chiaro che saremo soddisfatti di un'approssimazione del tipo $f(t) \approx e^t$ per $t \to +\infty$, dato che questo termine diverge a $+\infty$, mentre l'altro rimane limitato. Ma se invece $f(t) = e^t + t$? Anche qui l'approssimazione sensata, per $t \to +\infty$, è $f(t) \approx e^t$, dato che l'esponenziale cresce più rapidamente del termine di primo grado t. Come formalizzare in modo preciso la frase "cresce ben più rapidamente"?

Lo stesso tipo di problema sorge nel caso di quantità infinitesime. Come confrontare termini che diventano molto piccoli (tendenti a zero)?

Ordine di infinito per $x \to +\infty$. Consideriamo qui funzioni f tali che

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$$

(il caso $x \to -\infty$ è analogo). Come distinguere tra funzioni di questo genere quelle che divergono "più rapidamente" e quelle che divergono "meno rapidamente"? Ad esempio le funzioni $x^\alpha, \ln x, e^x, a^x$ (con $\alpha > 0$ e $a > 1$) divergono per $x \to +\infty$ in modi essenzialmente differenti. Quale di queste funzioni cresce più rapidamente delle altre?

Dato che

x	1	10	100	1000
x^2	1	100	10000	1000000
x^3	1	1000	1000000000	1000000000000

ci aspettiamo che x^3 tenda all'infinito più rapidamente di x^2. La maniera rigorosa per esprimere questo concetto è studiare il rapporto delle due quantità. Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty,$$

la grandezza di x^3 relativamente a quella di x^2 è maggiore. Questa proprietà si esprime dicendo che x^3 *tende a* $+\infty$ *più rapidamente di* x^2 *per* $x \to +\infty$.

Allo stesso modo, x^α cresce più rapidamente di x^β per $\alpha > \beta$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = +\infty \qquad \forall\, \alpha > \beta.$$

DEFINIZIONE 1.1. *Ordine di infinito I.* *Siano f e g tali che*

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim_{x\to+\infty} |g(x)| = +\infty. \tag{6}$$

Si dice che: f ha ordine di infinito superiore rispetto a g per $x \to +\infty$ *se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty.$$

Analogamente, f ha ordine di infinito inferiore rispetto a g per $x \to +\infty$ *se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Può capitare che due funzioni abbiano lo stesso tipo di andamento all'infinito. Ad esempio: x e $2x$ sono entrambi polinomi di grado 1 e vale:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Il fatto che il limite del rapporto sia una costante non zero, suggerisce che le due funzioni hanno lo stesso ordine di grandezza. Si sarebbe tentati di dire che due funzioni hanno lo stesso ordine di grandezza se e solo se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \ell > 0.$$

Questa definizione, seppure ragionevole, è troppo restrittiva: non è in grado di coprire casi con termini oscillanti. Un esempio: per $f(x) = x(1+\sin^2 x)$ e $g(x) = x$, si ha

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{|x||1+\sin^2 x|}{|x|} = 1 + \sin^2 x \in [1,2],$$

che non ammette limite per $x \to +\infty$. Ma, dato che $x \le f(x) \le 2x$, è ragionevole affermare che f tende all'infinito con la stessa velocità di x.

DEFINIZIONE 1.2. *Ordine di infinito II.* *Si dice che le funzioni f e g, soddisfacenti* (6)*, hanno* lo stesso ordine di infinito per $x \to +\infty$ *se esistono $C_1, C_2 > 0$ tali che*

$$0 < C_1 \le \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \le C_2 \qquad \text{per } x \text{ sufficientemente grande.} \tag{7}$$

In generale, per verificare la condizione (7) occorre stimare il rapporto $|f|/|g|$ e non sempre questa operazione è facile. Però, se esiste ed è diverso da zero il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \ell \neq 0,$$

la condizione (7) è automaticamente soddisfatta. Ad esempio, consideriamo le funzioni $f(x) = 2x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 + x + 3$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 3} = 2 \neq 0,$$

quindi hanno lo stesso ordine di infinito. In generale, se f è un polinomio di grado m e g un polinomio di grado p, allora: se $m > p$, f è di ordine superiore a g; se $m = p$, f e g sono dello stesso ordine; se $m < p$, f è di ordine inferiore a g.

OSSERVAZIONE 1.3. Se f è di ordine superiore rispetto a g, allora la funzione somma $f + g$ ha lo stesso ordine di f, infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) + g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right) = 1.$$

Ad esempio, la funzione $x + \ln x$ ha lo stesso ordine di infinito di x per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1.$$

DEFINIZIONE 1.4. *Se per una funzione f esiste un valore $\alpha > 0$ tale che f è dello stesso ordine di infinito di $|x|^\alpha$ per $x \to +\infty$ si dice che f è un* infinito di ordine α. *La funzione $|x|$ è detta* infinito campione per $x \to +\infty$.

Ad esempio, la funzione $\sqrt{1 + x^2}$ è tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1,$$

quindi ha ordine di infinito uguale ad 1 per $x \to +\infty$. La funzione $\dfrac{4x^3 + 1}{x - 5}$ è tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(4x^3 + 1)/(x - 5)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + 1}{x^3 - 5x^2} = 4$$

quindi ha ordine di infinito 2. In generale, l'ordine di infinito di una funzione razionale con numeratore di grado m e denominatore di grado p (con $m > p$) è $m - p$ (dimostratelo!).

OSSERVAZIONE 1.5. Se una funzione f ha ordine di infinito α, allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha+\varepsilon}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} \frac{1}{x^\varepsilon} = 0 \qquad \forall\, \varepsilon > 0;$$

cioè ha ordine di infinito inferiore rispetto ad $x^{\alpha+\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$. Analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha-\varepsilon}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}}\, x^{\varepsilon} = \infty \qquad \forall\, \varepsilon > 0,$$

quindi ha ordine di infinito superiore rispetto ad $x^{\alpha-\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Si potrebbe pensare di introdurre una "scala assoluta" di ordine di grandezza delle funzioni, attribuendo a ciascuna funzione divergente la corrispondente potenza che la rappresenta. Questa scala, però, non adempie il compito richiesto: ci sono funzioni la cui "velocità di divergenza" non corrisponde a quella di nessuna potenza e quindi che, in questo senso, non possono essere classificate. I due casi più rilevanti sono dati dalla funzione $\ln x$ e da e^x per cui vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = +\infty \qquad \forall\, \alpha > 0. \tag{8}$$

Per dimostrare (8), osserviamo preliminarmente che vale la disequazione[1]

$$\ln t \le t \qquad \forall\, t > 0. \tag{9}$$

Ora, dato $\alpha > 0$, scegliamo $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Applicando la disequazione (9) per $t = x^{\alpha-\varepsilon}$ e usando le proprietà del logaritmo:

$$\ln x \le \frac{1}{\alpha - \varepsilon}\, x^{\alpha-\varepsilon} \qquad \forall\, x > 0,\ 0 < \varepsilon < \alpha.$$

Dividendo entrambi i membri per x^{α} e passando al limite,

$$0 \le \frac{\ln x}{x^{\alpha}} \le \frac{1}{(\alpha-\varepsilon)x^{\varepsilon}} \qquad \forall\, x > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0.$$

Per il secondo limite in (8), ponendo $y = e^x$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(\ln y)^{\alpha}} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y^{1/\alpha}}{\ln y}\right)^{\alpha} = +\infty.$$

Le formule in (8) affermano che $\ln x$ diverge per $x \to +\infty$ più lentamente di qualsiasi potenza x^{α} e che e^x diverge più rapidamente di qualsiasi potenza x^{α}.

Osservazione 1.6. Con le funzioni esponenziali e con i logaritmi, è possibile costruire funzioni che divergono a velocità sempre più grandi o a velocità sempre più piccole. Ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(e^x)}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty,$$

e quindi $\ln(\ln x)$ è un infinito di ordine inferiore a $\ln x$ e $e^{(e^x)}$ è di ordine superiore a e^x.

[1] Infatti, detta $F(t) = t - \ln t$, allora $F'(t) = 1 - 1/t$ e quindi F ha un punto di minimo assoluto per $t = 1$. Perciò $F(t) \ge F(1) = 1 > 0$.

Osservazione 1.7. Cosa succede per a^x e $\log_a x$ con $a > 1$ (e diverso da e)? La funzione $\log_a x$ si può scrivere in termini della funzione $\ln x$:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

(sapete giustificare questa formula?). Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha \ln a} = 0 \qquad \forall\, \alpha > 0.$$

Procedendo come nel passaggio dal limite riguardante il logaritmo naturale al limite per l'esponenziale con base e, deduciamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \forall\, \alpha > 0,\ a > 1.$$

E' interessante confrontare tra loro esponenziali e logaritmi con basi diverse:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln a}\frac{\ln b}{\ln x} = \frac{\ln b}{\ln a} \qquad \forall a, b > 1,$$

quindi logaritmi con basi diverse hanno lo stesso ordine di infinito. Per gli esponenziali, invece, dati $a, b > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \begin{cases} 0 & a < b, \\ 1 & a = b, \\ +\infty & b < a, \end{cases}$$

che mostra che esponenziali con base maggiore hanno ordine di infinito maggiore.

Ordine di infinito e comportamento asintotico. È possibile che per una funzione f valga una decomposizione del tipo

$$f(x) = g(x) + h(x) \qquad \text{con } \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0, \tag{10}$$

dove la funzione g è una funzione "nota" (ad esempio, una funzione con un asintoto obliquo). Se la funzione $|g|$ diverge a $+\infty$ per $x \to +\infty$, allora

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim_{x\to+\infty} |g(x) + h(x)| = +\infty.$$

Come sono collegati gli ordini di infinito di f e g? La risposta è semplice: *le funzioni f e g hanno lo stesso ordine di infinito*, infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x) + h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{h(x)}{g(x)}\right) = 1. \tag{11}$$

Ad esempio, tutte le funzioni che possiedono un asintoto obliquo (non orizzontale) per $x \to +\infty$ hanno ordine di infinito 1.

E' vero il viceversa? Supponiamo di sapere che una funzione f abbia lo stesso ordine di infinito di una funzione g:

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)| = \lim_{x\to+\infty}|g(x)| = +\infty \quad \text{e} \quad 0 < C_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C_2.$$

E' vero che vale una rappresentazione come quella data in (10)? La risposta, in generale, è negativa. Ad esempio, per le funzioni $f(x) = x + \ln x$ e $g(x) = x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln x}{x} = 1,$$

ma la differenza tra f e g se ne guarda bene dal tendere a zero per $x \to +\infty$

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x - \ln x) - x = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$

Ordine di infinito per $x \to x_0$. Così come si confrontano i comportamenti delle funzioni per $x \to +\infty$, è possibile confrontare funzioni che divergono in un punto x_0. La terminologia è analoga alla precedente.

Definizione 1.8. *Ordine di infinito III. Date due funzioni f e g tali che*

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \lim_{x\to x_0}|g(x)| = +\infty,$$

si dice che f è un infinito di ordine superiore rispetto a g per $x \to x_0$ *se*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty.$$

Se il limite è 0, f è un infinito di ordine inferiore rispetto a g per $x \to x_0$*. Infine, se esistono C_1, C_2 e $\delta > 0$ per cui*

$$(12) \qquad 0 < C_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C_2 \qquad \textit{per} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

si dice che f e g hanno stesso ordine di infinito per $x \to x_0$.

Come nel caso di $x \to +\infty$, se $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = \ell \neq 0$, allora è automaticamente verificata la condizione (12) e, quindi, f e g sono dello stesso ordine. Ad esempio

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{\sin x}\right| = +\infty \quad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{1/\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

quindi $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/\sin x$ sono "infiniti" dello stesso ordine per $x \to 0$.

Definizione 1.9. *Se la funzione f ha lo stesso ordine di infinito di $1/|x - x_0|^\alpha$ per qualche $\alpha > 0$, si dice che f è un* infinito di ordine α per $x \to x_0$*. La funzione $1/|x - x_0|$ è detta* infinito campione per $x \to x_0$.

Anche qui si può ripetere quanto detto in precedenza: esistono funzioni che non hanno un ordine di infinito per $x \to x_0$. Un esempio? Con il cambio di variabile $y = -\ln x$, si deduce che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = 0,$$

che mostra che $\ln x$ ha un ordine di infinito in 0 inferiore a qualsiasi potenza.

Ordine di infinitesimo. Così come si confrontano infiniti, è possibile confrontare funzioni infinitesime per $x \to x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure per $x \to \pm\infty$. Qui, per abbreviare l'esposizione, scriviamo x_0 per indicare o un numero reale, o uno dei due simboli $\pm\infty$.

DEFINIZIONE 1.10. *Ordine di infinitesimo. Siano f e g infinitesime per $x \to x_0$. Si dice che f è un* infinitesimo di ordine superiore a g per $x \to x_0$ *se*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0. \tag{13}$$

Se il limite è $+\infty$, f è un infinitesimo di ordine inferiore a g. *Infine, f e g hanno lo* stesso ordine di infinitesimo *se in un intorno di x_0 (nel caso di $x_0 = \pm\infty$ si intende per valori sufficientemente grandi),*

$$0 < C_1 \le \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le C_2 \qquad \textit{per qualche } C_1, C_2 > 0.$$

Come nel caso degli infiniti, si introducono infinitesimi campione.

– Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che f è un infinitesimo di ordine α, se è dello stesso ordine di $|x - x_0|^\alpha$. La funzione $|x - x_0|$ è l'infinitesimo campione per $x \to x_0$.
– Se $x_0 = \pm\infty$, si dice che f è un infinitesimo di ordine α, se è dello stesso ordine di $1/|x|^\alpha$. La funzione $1/|x|$ è l'infinitesimo campione per $x \to \pm\infty$.

Qualche esempio (tanto per gradire):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \sin x \text{ è infinitesimo di ordine 1 per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/(1+x^2)}{1/x^2} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} \text{ è infinitesimo di ordine 2 per } x \to \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad 1-\cos x \text{ è infinitesimo di ordine 2 per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arctan(1/x)}{1/x} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \text{ è infinitesimo di ordine 1 per } x \to \pm\infty$$

I simboli di Landau: "O" e "o". Per indicare che una funzione f ha un ordine di grandezza inferiore a quello di un'altra funzione g si usa la notazione $f = o(g)$ per $x \to x_0$ (si legge f *è un "o piccolo" di* g). Il significato di questa affermazione è che f/g tende a zero per $x \to x_0$. Ad esempio,

$$x^\alpha = o(x^\beta) \qquad \forall\, \alpha < \beta \qquad\qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Abbiamo anche visto che

$$\begin{aligned} &\ln x = o(x^\alpha) && \forall\, \alpha > 0 && \text{per } x \to +\infty, \\ &x^\alpha = o(e^x) && \forall\, \alpha > 0 && \text{per } x \to +\infty, \\ &1 - \cos x = o(x) && && \text{per } x \to 0. \end{aligned}$$

Esercizio 1.11. *Verificare la validità di*

$$\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad\qquad \textit{per } x \to +\infty.$$

Analogamente si introduce la notazione $f = O(g)$ (si legge f *è un "O grande" di* g) per indicare che la funzione f ha al più l'ordine di grandezza di g, ossia se il rapporto f/g è limitato in un intorno di x_0

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le C,$$

per qualche $C > 0$, in un intorno di x_0. Ad esempio,

$$\sqrt{10x-1} = O(\sqrt{x}) \qquad\qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Infatti, dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{10x-1}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{10 - \frac{1}{x}} = \sqrt{10},$$

il rapporto di $\frac{\sqrt{10x-1}}{\sqrt{x}}$ è limitato per valori della x sufficientemente grandi.

Dai limiti notevoli

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

segue che, per $x \to 0$,

$$e^x = 1 + O(x), \quad \ln(1+x) = O(x), \quad \sin x = O(x), \quad \cos x = 1 + O(x^2).$$

Derivabilità con i simboli di Landau. Tramite i simboli di Landau si può riscrivere la derivabilità di una funzione in modo diverso. La derivabilità di una funzione f in x può essere scritta nella forma

$$\lim_{h\to0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0.$$

Quindi, se una funzione è derivabile in x, vale la relazione (particolarmente significativa)

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) \qquad \text{per } x \to 0. \tag{14}$$

L'interpretazione di questa formula è che l'incremento di f si può rappresentare come un termine $f'(x)h$, lineare nell'incremento h, più un resto che ha un ordine di grandezza inferiore ad h per $h \to 0$. Si usa la terminologia:

$$\textsf{differenziale di } f\text{:} \qquad df(x;h) := f'(x)h.$$

Fissato il valore di x, il differenziale $df(x;h)$ rappresenta un'approssimazione (valida a meno di $o(h)$) dell'incremento $\Delta f(x;h) := f(x+h) - f(x)$:

$$\Delta f(x;h) \approx df(x;h) \qquad \text{per } h \to 0.$$

Come si precisa il senso del simbolo $\approx$? Proprio tramite i simboli di Landau:

$$|\Delta f(x;h) - df(x;h)| = o(h) \qquad \text{per } h \to 0,$$

che esprime il fatto che l'errore che si commette sostituendo all'incremento Δf, il differenziale df è un infinitesimo di ordine superiore al primo.

2. Il Teorema di de l'Hôpital

Supponiamo f e g continue nell'intervallo (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

In questa situazione non è evidente se esista e quanto valga il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Sostituendo, formalmente, a f e g il valore nel punto limite si ottiene l'espressione $\frac{0}{0}$ che non ha senso. L'esistenza o meno del limite è legata alla rapidità con cui le funzioni f e g tendono a 0 per $x \to x_0$, ossia alla relazione che c'è tra i loro ordini di infinitesimo. Come risolvere un limite del genere? Se le funzioni f e g sono derivabili in x_0, si può pensare di approssimare le funzioni f e g con la loro retta tangente nel punto x_0:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)} = \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Come rendere rigorosa tale affermazione? Utilizzando (14), si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)} = \frac{f'(x_0) + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0}}{g'(x_0) + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0}} \tag{15}$$

avendo utilizzato la proprietà $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Passando al limite per $x \to x_0$, nel caso in cui $g'(x_0) \neq 0$, si ottiene

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad\qquad (g'(x_0) \neq 0).$$

Questa formula è nota come regola di de l'Hôpital[2]. Lavorando in maniera più raffinata, si dimostra una variante della precedente formula di de l'Hôpital, che non richiede la derivabilità delle funzioni f e g nel punto limite, ma solo l'esistenza del limite del rapporto delle derivate. Anche tale variante è nota sotto lo stesso nome.

TEOREMA 2.1. Regola di de l'Hôpital. *Siano f e g due funzioni derivabili tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Se esiste finito*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R},$$

allora esiste anche il limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ ed ha lo stesso valore ℓ.

La conclusione è valida anche nel caso in cui il rapporto delle derivate abbia limite $+\infty$ o $-\infty$. Non si può dedurre nessuna conclusione nel caso in cui il rapporto delle derivate non abbia limite.

Esistono in commercio anche altre versioni del Teorema di de l'Hôpital che si applicano a casi differenti: forme indeterminate del tipo $0/0$ per $x \to \pm\infty$ o del tipo ∞/∞ per $x \to x_0$ e per $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty, \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = \lim_{x\to\pm\infty} |g(x)| = \infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Il simbolo ℓ può essere sia un numero reale sia $+\infty$ o $-\infty$.

Il principio è sempre lo stesso: nel caso di una forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞, si può calcolare il limite del rapporto delle derivate. Se tale limite esiste, allora dà anche il valore del limite iniziale. Se, invece, il rapporto delle derivate non esiste, non si può

[2]Questa regola porta il nome il nome del matematico francese Guillaume Francois Antoine, marchese de L'Hôpital (1661 – 1704), che pubblicò la formula nel suo libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1692). La regolar è in realtà dovuta a Jean Bernoulli, a cui L'Hôpital pagava una pensione di 300 franchi annui in cambio delle informazioni relative ai suoi progressi nel calcolo infinitesimale e della risoluzione di alcuni problemi posti dal de L'Hôpital (tra cui quello di determinare il limite di forme indeterminate). L'Hôpital, riconoscendo che parte del contenuto del suo trattato era dovuta a Bernoulli, preferì pubblicarlo in forma anonima. Ciò nonostante, una volta scoperto l'autore del libro, la formula fu associata al suo nome.

concludere nulla. Nel caso in cui il limite del rapporto delle derivate dia luogo, esso stesso, ad una forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞, si può applicare di nuovo il Teorema di de l'Hôpital e (provare a) calcolare il limite del rapporto delle derivate seconde.

ESEMPIO 2.2. Per calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x - \sin x}, \tag{16}$$

studiamo il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1+x^2)(1-\cos x)} = 2,$$

dato che $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2 = 1/2$. Quindi il limite (16) esiste e vale 2.

ESEMPIO 2.3. Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) x.$$

Questo limite è della forma $0 \cdot \infty$, ma si può ricondurre alla tipologia trattabile con il teorema di de l'Hôpital riscrivendolo come

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{1/x}.$$

Il rapporto delle derivate ha limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Quindi, il limite richiesto esiste e vale 1.

ESERCIZIO 2.4. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\cos x - 1}.$$

La dimostrazione del Teorema di de L'Hôpital. Per cominciare, enunciamo (e dimostriamo) una variante del Teorema di Lagrange, nota come Teorema di Cauchy.

TEOREMA 2.5. *Teorema di Cauchy. Siano f e g due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b). Allora esiste $\xi \in (a,b)$ tale che*

$$\det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f'(\xi) \\ g(b) - g(a) & g'(\xi) \end{pmatrix} = 0, \tag{17}$$

cioè $(f(b) - f(a))g'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$.

Interpretazione geometrica. Date le funzioni f e g, consideriamo la funzione *vettoriale* (f, g) che associa ad un punto dell'intervallo $[a, b]$ il punto del piano di coordinate (f, g). Il Teorema di Cauchy asserisce che esiste sempre un valore $\xi \in (a, b)$ tale che il vettore incremento $(f(b) - f(a), g(b) - g(a))$ e il vettore "derivata" $(f'(x), g'(x))$ calcolato in $x = \xi$ sono paralleli.

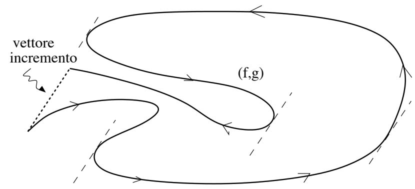

FIGURA 1. L'interpretazione geometrica del Teorema di Cauchy.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.5. Consideriamo la funzione

$$\begin{aligned}\Phi(x) &:= \det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f(x) - f(a) \\ g(b) - g(a) & g(x) - g(a) \end{pmatrix} \\ &= \big[f(b) - f(a)\big]\,[g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)]\big[g(b) - g(a)\big].\end{aligned}$$

La funzione Φ è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Inoltre, si hanno

$$\Phi(a) = \det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & 0 \\ g(b) - g(a) & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\Phi(b) = \det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f(b) - f(a) \\ g(b) - g(a) & g(b) - g(a) \end{pmatrix} = 0$$

Quindi, per il Teorema di Rolle, esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $\Phi'(\xi) = 0$. Dall'espressione

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= (f(b) - f(a))g'(x) - f'(x)(g(b) - g(a)) \\ &= \det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f'(x) \\ g(b) - g(a) & g'(x) \end{pmatrix} = 0,\end{aligned}$$

segue la conclusione. □

Armati del precedente risultato, si può dimostrare il Teorema di de l'Hôpital.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.1. Scegliamo, nella formula (17), $a = x_0$ e $b = x$. Dato che, per ipotesi, $f(x_0) = g(x_0) = 0$, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{18}$$

dove ξ è compreso tra x_0 e x. Per $x \to x_0$, necessariamente $\xi \to x_0$, e il termine $f'(\xi)/g'(\xi)$ tende ad ℓ per ipotesi. Dato che questo termine è uguale a $f(x)/g(x)$, ne segue la conclusione □

Approssimazioni polinomiali. Utilizziamo adesso il Teorema di de l'Hôpital per dedurre delle approssimazioni polinomiali di funzioni con un errore che sia infinitesimo di ordine sempre più alto. Scegliamo come cavia la funzione $\sin x$. Dato che è derivabile in 0 e la sua derivata è 1,

$$\sin x = x + o(x) \qquad \text{per } x \to 0 \tag{19}$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0.$$

Per dedurre un'approssimazione per $\sin x$ con un errore che sia $o(x^2)$, calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}.$$

Per applicare il Teorema di de l'Hôpital, studiamo il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Dato che tale limite esiste finito, anche il limite di partenza esiste e vale 0. Quindi

$$\sin x = x + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0 \tag{20}$$

La formula (20) dice che l'errore che si commette approssimando $\sin x$ con x è un infinitesimo di ordine superiore al secondo per $x \to 0$. Questa informazione è migliore di quella data da (19), che ci garantiva solamente un errore di ordine superiore al primo.

Per ottenere un approsimazione con errore di ordine superiore al terzo, ragioniamo come in precedenza e calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = -\frac{1}{6},$$

che implica $\sin x = x + O(x^3)$. Portando il termine $-1/6$ a primo membro, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$$

cioè la funzione $\sin x$ è pari a $x - \frac{1}{6}\,x^3$ più un errore superiore a x^3

$$\sin x = x - \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0. \tag{21}$$

Possiamo iterare il procedimento e calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + x}{12x^2} = 0,$$

quindi

$$\sin x = x - \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0. \tag{22}$$

Ripetiamo l'esperimento su una cavia diversa: e^x. Il fatto che e^x sia derivabile in $x = 0$ e la derivata valga 1 si traduce nella formula

$$e^x = 1 + x + o(x) \qquad \text{per } x \to 0. \tag{23}$$

Per migliorare l'espressione, calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2},$$

cioè $e^x = 1 + x + O(x^2)$. Il limite può essere riscritto come

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} - \frac{1}{2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^2} = 0,$$

cioè $e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$, o anche

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Allo stesso modo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} = \frac{1}{6}, \tag{24}$$

La relazione (24) si può riscrivere come

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) = 0 \iff e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Cosa stiamo facendo iterando questo procedimento? Stiamo ottenendo delle approssimazioni ad ordini sempre più alti di una funzione data. La relazione $e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ esprime il fatto che la funzione e^x si può approssimare, per $x \to 0$ con il polinomio $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$ commettendo un errore (la differenza tra e^x e il polinomio) che tende a zero per $x \to 0$ con ordine superiore a 3 (cioè più rapidamente di x^3).

L'iterazione dell'algoritmo che abbiamo visto conduce direttamente a quello che si chiama *polinomio di Taylor*.

3. La formula di Taylor

Replichiamo, in generale, l'esperimento fatto su $\sin x$ e e^x alla fine del paragrafo precedente. Se f è una funzione derivabile in x_0, si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = 0,$$

o, equivalentemente,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \qquad \text{per} \quad x \to x_0,$$

che esprime che la funzione f, vicino ad x_0, si approssima con la funzione $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, con un errore che è un infinitesimo di ordine superiore ad 1.

Per ottenere un'approssimazione più precisa, supponendo che la funzione f si derivabile due volte, possiamo calcolare il limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=\frac{1}{2}f''(x_0),$$

avendo applicato il Teorema di de l'Hôpital. Il precedente limite si può scrivere come

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2\right]}{(x-x_0)^2}=0$$

ossia

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o(|x-x_0|^2).$$

Così abbiamo scoperto che la funzione $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$ approssima f, vicino ad x_0, con un errore di ordine superiore a 2. Il grafico della funzione $p(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$ rappresenta la parabola che meglio approssima la funzione f per $x\to x_0$.

Iterando ancora una volta il procedimento e supponendo che la funzione f sia derivabile tre volte in x_0, si ottiene

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3+o(|x-x_0|^3).$$

E in generale?

Teorema 3.1. Formula di Taylor. *Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile n volte in (a,b) e sia $x_0\in(a,b)$. Dato $n\in\mathbb{N}$, posto*

$$T_n(x;x_0):=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,$$

si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}=0,$$

cioè vale la decomposizione $f(x)=T_n(x;x_0)+o(|x-x_0|^n)$.

Definizione 3.2. *Il polinomio $T_n(x;x_0)$ si chiama* polinomio di Taylor[3] di grado n della funzione f nel punto x_0 *e rappresenta un'approssimazione di f vicino ad x_0.*

La peculiarità della formula di Taylor sta nel fatto che il resto R_n, definito da

$$R_n(x;x_0):=f(x)-T_n(x;x_0),$$

è un infinitesimo di ordine superiore ad $|x-x_0|^n$ per $x\to x_0$.

[3]Se $x_0=0$, il polinomio p_n viene, a volte, chiamato polinomio di McLaurin.

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo il Teorema di de l'Hôpital al limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n}$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-2}}{n(x-x_0)^{n-1}}.$$

Dato che sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi, possiamo applicare nuovamente il Teorema di de l'Hôpital, ottenendo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0) - f'''(x_0)(x-x_0) \cdots - \frac{1}{(n-3)!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-3}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}.$$

Iterando $n-1$ volte il procedimento si ottiene

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Quindi vale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

da cui segue

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n} - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = 0,$$

che porta alla conclusione. □

ESEMPIO 3.3. Polinomi. Assegnati $a_0, \dots, a_p$, sia

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p.$$

Consideriamo, prima di tutto, lo sviluppo in $x_0 = 0$. Dato che

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2\, x + \cdots + p a_p x^{p-1} \\
f''(x) &= 2a_2 + 3\cdot 2 a_3\, x + \cdots + p(p-1) a_p x^{p-2} \\
&\vdots \\
f^{(p)}(x) &= p(p-1)\cdots 2\cdot 1\, a_p \\
f^{(k)}(x) &= 0 \qquad\qquad k > p
\end{aligned}$$

si ha

$$f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad \dots \quad f^{(p)}(0) = p!\, a_p, \quad f^{(k)}(0) = 0 \qquad k > p.$$

Quindi,

$$T_n(x;0) = \begin{cases} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n & n < p, \\ a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p & n \ge p. \end{cases}$$

Come era naturale aspettarsi, il polinomio di Taylor di f in $x_0 = 0$ e di grado n si ottiene considerando i termini del polinomio con grado minore o uguale ad n.

Per il polinomio di Taylor in $x_0 \neq 0$, occorre riscrivere il polinomio in termini di potenze di $h := x - x_0$. In questo modo si otterrà un'espressione del tipo

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_p(x - x_0)^p$$

con $b_0, b_1, \ldots, b_p$ opportuni. Il polinomio di Taylor è dato da

$$T_n(x; x_0) = \begin{cases} b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n & n < p, \\ b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_p(x - x_0)^p & n \geq p. \end{cases}$$

Consideriamo, ad esempio, la funzione $f(x) = x + x^3$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, per scriverla in termini di potenze di $h = x - x_0$ calcoliamo

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h) + (x_0 + h)^3 = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)h + 3x_0h^2 + h^3.$$

Quindi vale l'identità

$$x + x^3 = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)(x - x_0) + 3x_0(x - x_0)^2 + (x - x_0)^3.$$

Ad esempio, il polinomio di Taylor di grado 2 in x_0 è

$$T_2(x; x_0) = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)(x - x_0) + 3x_0(x - x_0)^2.$$

Lo stesso, evidentemente, si ottiene applicando direttamente la formula: da

$$f(x) = x + x^3, \qquad f'(x) = 1 + 3x^2, \qquad f''(x) = 6x,$$

segue

$$T_2(x; x_0) = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)(x - x_0) + 3x_0(x - x_0)^2.$$

Esempio 3.4. Esponenziale in $x_0 = 0$. Siano

$$f(x) = e^x \qquad \text{e} \qquad x_0 = 0.$$

Dato che $f^{(k)}(x) = e^x$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ per ogni k, quindi il polinomio di Taylor di grado n è

$$T_n(x; 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Questa formula è coerente con la definizione di esponenziale data in precedenza.

Che succede se $x_0 \neq 0$? I conti non sono molto diversi:

$$T_n(x; 0) = e^{x_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} = e^{x_0} \left[1 + (x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}\right].$$

ESEMPIO 3.5. *Seno e coseno in $x_0 = 0$.* Sia $f(x) = \sin x$, allora

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x, \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \qquad \forall\, k = 0, 1, 2, \dots.$$

Calcolando in $x_0 = 0$, otteniamo

$$f^{(2k)}(0) = 0, \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \qquad \forall\, k = 0, 1, 2, \dots.$$

Ne segue che

$$T_n(x; 0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

è il polinomio di Taylor di grado n con $n = 2k+1$ o $2k+2$. In effetti si può dimostrare che vale l'uguaglianza

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Analogamente se consideriamo la funzione $f(x) = \cos x$ abbiamo

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x, \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x \qquad \forall\, k = 0, 1, 2, \dots.$$

Calcolando in $x_0 = 0$, otteniamo

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k, \qquad f^{(2k+1)}(0) = 0 \qquad \forall\, k.$$

Ne segue che

$$T_n(x; 0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

è il polinomio di Taylor di $\cos x$ centrato in 0 di grado n con $n = 2k$ o $2k+1$. Anche per il coseno vale un'uguaglianza analoga alla precedente:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 3.6. *Calcolare il polinomio di Taylor di grado 4 della funzione $\sin x$ centrato in $x_0 = \pi/2$ e quello centrato in $x_0 = \pi/4$.*

ESEMPIO 3.7. Siano $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e $x_0 = 0$. Le derivate di f sono

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad \dots, \qquad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Perciò $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$,... $f^{(k)}(0) = k!$. Quindi il polinomio di Taylor è

$$T_n(x; 0) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

coerente con l'espressione nota per la serie geometrica.

Esempio 3.8. Come ultimo esempio, consideriamo

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad \text{e} \qquad x_0 = 0.$$

Le derivate di f sono

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad \dots, \qquad f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k},$$

e quindi $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$. Il polinomio di Taylor di grado n in $x_0 = 0$ è

$$T_n(x;0) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}.$$

4. Espressioni del resto

Data una funzione f, con un buon numero di derivate, sappiamo determinare un polinomio che la approssimi vicino ad un punto assegnato x_0. In questa approssimazione viene commesso un errore pari a

$$R_n(x;x_0) := f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k.$$

Quali proprietà conosciamo su R_n? Per ora sappiamo solo che

$$R_n(x;x_0) = o(|x-x_0|^n) \quad \text{cioè} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Questa è solo un'informazione sul comportamento al limite, quindi non dice nulla di preciso sulla grandezza della quantità R_n in punti $x \neq x_0$. Per poter stimare l'errore occorre una rappresentazione migliore di R_n. Ecco il nostro nuovo obiettivo.

Teorema 4.1. <u>Resto in forma di Lagrange.</u> *Se la funzione f è derivabile $n+1$ volte, esiste ξ, tra x_0 e x, tale che*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1},$$

Dimostrazione. Sia f derivabile $n+1$ volte e consideriamo le funzioni

$$F(x) := R_n(x;x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \qquad \text{e} \qquad G(x) := (x-x_0)^{n+1}.$$

Dato che $F(x_0) = G(x_0) = 0$, applicando il Teorema di Cauchy a F e G, segue

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)},$$

per qualche ξ_1, compreso tra x_0 e x. Derivando le espressioni di F e G, otteniamo

$$F'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x_0)(x - x_0)^k \qquad \text{e} \qquad G'(x) = (n+1)(x - x_0)^n.$$

Se $n \geq 1$ è possibile riapplicare il Teorema di Cauchy, trovando ξ_2, compreso tra x_0 e ξ_1 e quindi anche tra x_0 e x, per cui

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

Iterando $n+1$ volte il procedimento, si dimostra l'esistenza di ξ_{n+1} tra x_0 e x tale che

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

Dato che $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ e $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, si deduce (qui $\xi = \xi_{n+1}$)

$$F(x) - F(x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \left(G(x) - G(x_0) \right)$$

da cui, ricordando le definizioni di F e G,

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \, (x - x_0)^{n+1},$$

cioè la conclusione. $\square$

A partire da questa espressione del resto, possiamo stimare l'errore commesso quando si approssimi una funzione f con il suo polinomio di Taylor: se $M > 0$ è tale che $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ per ogni t tra x e x_0, allora

$$|R_n(x; x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Calcolo approssimato di $\sin(1/10)$ *con stima dell'errore.* Abbiamo già considerato questo problema proponendo come "candidato" per l'approssimazione il valore $1/10$. In quell'occasione avevamo stimato l'errore commesso con $1/100$. Il procedimento era basato sul Teorema di Lagrange e sull'approssimazione della funzione $\sin x$ con la sua tangente nell'origine:

$$\sin x \approx x \qquad \text{per } x \to 0.$$

Detta $f(x) = \sin x$, la stima dell'errore discendeva da

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| &= |(f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0)| \\ &= |f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0)| \leq |f''(\eta)||x - x_0|^2. \end{aligned}$$

dove $x = 1/10$ e $x_0 = 0$. Dato che $f''(x) = -\sin x$, la stima è immediata.

Come ottenere stime migliori? La scelta naturale è approssimare la funzione $\sin x$ con un suo polinomio di Taylor di grado opportuno. Ad esempio,

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \qquad \text{per } x \to 0.$$

Quindi un'approssimazione migliore della precedente è

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} = 0,0998\bar{3}.$$

Scriviamo l'errore con la forma di Lagrange $R_3(x; x_0) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x - x_0)^4$, cioè

$$\sin\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6000}\right) = R_3(1/10; 0) = \frac{\sin\xi}{4!}\frac{1}{10^4},$$

quindi

$$|R_3(1/10; 0)| \leq \frac{1}{24 \cdot 10^4} = 4,1\bar{6} \times 10^{-6}.$$

In realtà il polinomio $x - \frac{x^3}{6}$ è anche il polinomio di Taylor di $\sin x$ in 0 di grado 4, quindi il resto può anche essere scritto come

$$\sin\frac{1}{10} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6000} = R_4(1/10; 0) = \frac{\cos\xi}{5!}\frac{1}{10^5},$$

quindi

$$|R_4(1/10; 0)| \leq \frac{1}{120 \cdot 10^5} = 8,\bar{3} \times 10^{-8}.$$

In definitiva

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) = 0,0998\bar{3} \pm 8,\bar{3} \times 10^{-8}.$$