

COGNOME: _____

NOME: _____

Nei primi 3 esercizi mettete solo una croce su vero ☐ V, falso ☐ F o ☐ ?. In questo tipo di esercizi le risposte errate verranno penalizzate. Nelle domande aperte l'esercizio va svolto in modo completo, in particolare indicate nello svolgimento gli argomenti di teoria utilizzati.

Esercizio n. 1 – Siano f definita e derivabile due volte su tutto $\mathbb{R}$

- i) sia $f > 0$ e f convessa in $\mathbb{R}$ allora la funzione f^2 è convessa in $\mathbb{R}$ ☒ ☐ F ☐ ?
 ii) sia $f < 0$ e f concava in $\mathbb{R}$ allora la funzione f^2 è concava in $\mathbb{R}$ ☐ V ☒ ☐ ?

Esercizio n. 2 – Sia $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \sin(x)$

- i) La funzione f è limitata in $\mathbb{R}$ ☒ ☐ F ☐ ?
 ii) La funzione f è pari ☒ ☐ F ☐ ?

Esercizio n. 3 –

- i) Se (a_n) e (b_n) sono due successioni tali che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n^2 b_n) = -\infty$ ☒ ☐ F ☐ ?
 ii) Se (a_n) e (b_n) sono due successioni tali che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$ ☐ V ☒ ☐ ?

Domande aperte

ESERCIZIO 4 Sia f la funzione definita in tutto $\mathbb{R}$ nel modo seguente

$$f(x) = \begin{cases} \cos(Ax) + e^{-Bx^2} & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + Bx + A & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- i) Determinare valori dei parametri $A, B \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti continua in $(-\infty, +\infty)$
 ii) Determinare valori dei parametri $A, B \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti derivabile in $(-\infty, +\infty)$
 iii) Determinare valori dei parametri $A, B \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti limitata in $(-\infty, 0)$

i) L'UNICO PROBLEMA E' PER $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + Bx + A = A, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos(Ax) + e^{-Bx^2} = 2$$

ovvero f è continua $\Leftrightarrow A=2 \quad B \in \mathbb{R}$

$$ii) f'(x) = \begin{cases} -A \sin(Ax) - 2Bx e^{-Bx^2} & x < 0 \\ 2x + B & x > 0 \end{cases}$$

se f è continua $\exists$ finito $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ ALLORA f è DERIVABILE in

$x=0$, se $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \Rightarrow f$ non è DERIVABILE (CONSEG. DEL TR di de L'HOPITAL)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -A \sin(Ax) - 2Bx e^{-Bx^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = B \Rightarrow B=0$$

f DERIV. $\Leftrightarrow B=0 \quad A=2$

iii) $\cos(Ax)$ è LIMITATO $\forall A \in \mathbb{R}$ mentre e^{-Bx^2} è LIMITATO

se è < 0 se $-B \leq 0$ ovvero $B \geq 0$

infatti in questo caso $0 < e^{-Bx^2} < 1$ se $-B > 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-Bx^2} = +\infty \Rightarrow f \text{ non LIMITATO} \Rightarrow f \text{ LIMITATO} \Leftrightarrow A \in \mathbb{R}, B \geq 0$$

² **ESERCIZIO 5** Sia $f(x) = (1+x)^{1/3} - \frac{x}{3}$

i) Dimostrare che per ogni $x \in [0, 1]$ vale la disuguaglianza $f(x) \leq 1$

ii) Scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado $P_2(x)$ di punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione $f(x)$

i) $f(0) = 1$ $f'(x) = \frac{1}{3} (1+x)^{-2/3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(1+x)^{2/3}} - 1 \right] < 0 \quad \forall x > 0$ **INFATTI**
 $\frac{1}{(1+x)^{2/3}} < 1 \Leftrightarrow 1 < (1+x)^{2/3} \Leftrightarrow 1 < 1+x \Leftrightarrow x > 0$ **PER CUI** f **DECRESCA**

IN $(0, 1) \Rightarrow f(x) < f(0) = 1 \quad \forall x > 0$

ii) $P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$
 $f(0) = 1$ $f'(x) = \frac{1}{3} (1+x)^{-2/3} - \frac{1}{3} \Rightarrow f'(0) = 0$
 $f''(x) = -\frac{2}{9} (1+x)^{-5/3} \Rightarrow f''(0) = -\frac{2}{9}$
 $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{9}$

ESERCIZIO 6 Sia $f(x) = x^2 \exp(-x^2)$

i) Calcolare $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ii) Determinare eventuali punti di massimo relativo e di minimo relativo

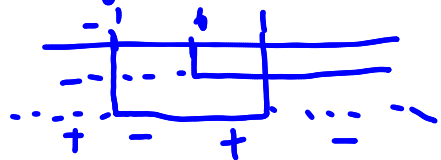
iii) Dire se esistono massimi e minimi assoluti

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$ **INFATTI** $x^2 e^{-x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}}$ **QUINDI** $\text{SE } x^2 = t$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0 \rightarrow$ **LIMITE NOTTEVOLI** (SI PUO' USARE **DE L'HOPITAL**)

ANALOGAMENTE $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}}$

ii) $f'(x) = 2x e^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2} = 2x(1-x^2) e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow$



$x = \pm 1$ **SONO** **PUNTI** **DI** **MAX** **RELATIVO**

$x = 0$ **E'** **PUNTO** **DI** **MIN** **RELATIVO**

$f(\pm 1) = e^{-1}$ $f(0) = 0$

MA e^{-1} **E'** **MAX** **ASSOLUTO** **INFATTI** 0 **E'** **IL** **MINIMO** **ASSOLUTO**
DI f , **QUINDI** **SI** **OTTIENE** **IL** **VALORE** **MINIMO** **DEL**
PUNTO **i)**