Calcolo Differenziale – Scritto del 12/1/2015	$\boxed{\textbf{B}}$
COGNOME: ____________________	NOME: ____________________

Nei primi 3 esercizi mettete solo una croce su vero $\boxed{\text{V}}$, falso $\boxed{\text{F}}$ o $\boxed{?}$. In questo tipo di esercizi le risposte errate verranno penalizzate. Nelle domande aperte l'esercizio va svolto in modo completo, in particolare indicate nello svolgimento gli argomenti di teoria utilizzati.

Esercizio n. 1 – Siano f definita e derivabile due volte su tutto $\mathbb{R}$

i) sia $f < 0$ e f concava in $\mathbb{R}$ allora la funzione f^2 è concava in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$ $\cancel{\boxed{\text{F}}}$ $\boxed{?}$

ii) sia $f > 0$ e f convessa in $\mathbb{R}$ allora la funzione f^2 è convessa in $\mathbb{R}$ $\cancel{\boxed{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{?}$

Esercizio n. 2 – Sia $f(x) = \frac{x}{x^2+4}\cos(x)$

i) La funzione f è pari $\boxed{\text{V}}$ $\cancel{\boxed{\text{F}}}$ $\boxed{?}$

ii) La funzione f è limitata in $\mathbb{R}$ $\cancel{\boxed{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{?}$

Esercizio n. 3 –

ii) Se (a_n) e (b_n) sono due successioni tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = 0$ $\boxed{\text{V}}$ $\cancel{\boxed{\text{F}}}$ $\boxed{?}$

ii) Se (a_n) e (b_n) sono due successioni tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty}(a_n^2 b_n) = -\infty$ $\boxed{\text{V}}$ $\cancel{\boxed{\text{F}}}$ $\boxed{?}$

Domande aperte

ESERCIZIO 4 Sia f la funzione definita in tutto $\mathbb{R}$ nel modo seguente

$$f(x) = \begin{cases} \sin(Bx) + e^{Ax^2} & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + Ax + B & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

i) Determinare valori dei parametri $A, B \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti continua in $(-\infty, +\infty)$
ii) Determinare valori dei parametri $A, B \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti derivabile in $(-\infty, +\infty)$
iii) Determinare valori dei parametri $A, B \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti limitata in $(0, +\infty)$

PER I RAGIONAMENTI SEGUI SOLUZIONI COMPITO A

i) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = B \Rightarrow f$ continua se $B = 1$ $A \in \mathbb{R}$

ii) $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = B$, $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = A \Rightarrow A = B$ allora f continua $\Leftrightarrow$ $A = B = 1$

iii) $A \leq 0$ e $B \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO 5 Sia $f(x) = \frac{x}{3} - (1+x)^{1/3}$
i) Dimostrare che per ogni $x \in [0,1]$ vale la disuguaglianza $f(x) \geq -1$
ii) Scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado $P_2(x)$ di punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione $f(x)$

i) VEDI COMPITO A

ii) $P_2(x) = \frac{x^2}{9} - 1$

ESERCIZIO 6 Sia $f(x) = x \exp(-x^2)$
i) Calcolare $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
ii) Determinare eventuali punti di massimo relativo e di minimo relativo
iii) Dire se esistono massimi e minimi assoluti

i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

ii) $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$ $\quad f'(x) \geq 0 \iff x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ E' UN PUNTO DI MIN RELATIVO $\quad f(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}$

$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . . . . MAX RELATIVO $\quad f(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}$

iii) $f(x_1)$ E' IL MIN ASSOL.
$f(x_2)$ E' IL MAX ASSOLUTO