Calcolo Differenziale – Prima prova scritta 20/01/2014 $\boxed{\textbf{B}}$

COGNOME: ____________________ NOME: ____________________

Nei primi 3 esercizi mettete solo una croce su vero $\boxed{\text{V}}$ o falso $\boxed{\text{F}}$, nel caso vogliate cambiare la risposta utilizzate $\boxed{\text{v}}$ o $\boxed{\text{f}}$. In questo tipo di esercizi le risposte errate verranno penalizzate. Nelle domande aperte l'esercizio va svolto in modo completo, in particolare indicate nello svolgimento la parte di teoria che utilizzate.

Esercizio n. 1 – Sia $f(x) = \frac{x}{\arctan(x)}$

i) La funzione f è pari nel suo insieme di definizione $\cancel{\boxed{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

ii) Esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$ $\cancel{\boxed{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

iii) La funzione f ammette asintoto obliquo per x che tende a $+\infty$ $\cancel{\boxed{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

Esercizio n. 2 – Sia $f(x) = |x|x$

i) f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ $\cancel{\boxed{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

ii) Il massimo assoluto di f nell'intervallo $[-2, 2]$ è uguale a 2 $\boxed{\text{V}}$ $\cancel{\boxed{\text{F}}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

iii) f ammette ammette un punto di flesso in $\mathbb{R}$ $\cancel{\boxed{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

Esercizio n. 3 – Sia $\{a_n\}$ la successione definita per ricorrenza nel seguente modo: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 1 + a_n^2$

i) la successione è sempre positiva $\cancel{\boxed{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

ii) la successione è crescente $\cancel{\boxed{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

iii) la successione ammette limite e questo è uguale a 5 $\boxed{\text{V}}$ $\cancel{\boxed{\text{F}}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

Domande aperte

ESERCIZIO 4 Si dimostri la seguente disuguaglianza $\log(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$ per ogni $x \geq 1$

SVOLGIMENTO

SIA $g(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$, SI HA $g(1) = 0$

$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} > 0$ SE $x > 1 \Longrightarrow$

g CRES. PER $x > 1 \Longrightarrow g(x) \geq g(1) = 0 \quad \forall x \geq 1$

ESERCIZIO 5 Sia f una funzione convessa definita in $(0, +\infty)$ si verifichi con un esempio che in generale f^2 non è convessa in $(0, +\infty)$.**SVOLGIMENTO**

ESEMPIO $f(x) = -\ln(x)$ CHE E' CONVESSA

ESSENDO $\ln(x)$ CONCAVA

$g(x) = f^2(x) = \ln^2(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$ E

$g''(x) = 2\frac{1-\ln(x)}{x^2} \Rightarrow g'' > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$

$x > e$ $g(x) = f^2(x)$ E' CONCAVA

ESERCIZIO 6 Calcolare $\lim_{x\to+\infty}(x^2+x)(e^{-\frac{1}{x^2}}-1)$ **SVOLGIMENTO**

$(x^2+x)(e^{-\frac{1}{x^2}}-1) = -\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-1}{-\frac{1}{x^2}}$ $y = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow$

$\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1$ MENTRE $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \Rightarrow$ IL LIMITE

RICHIESTO PER IL PRODOTTO DEI LIMITI

E' UGUALE A -1 !

ESERCIZIO 7 Si dimostri che la seguente successione $a_n = n!2^{-n}$ è crescente per $n \geq 1$. (NB crescente non in senso stretto)**SVOLGIMENTO**

DIMOSTRAZIONE DIRETTA $a_{n+1} = (n+1)!\,2^{-(n+1)}$

$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow n!\,2^{-n} \leq (n+1)!\,2^{-n}2^{-1} = (n+1)n!\,2^{-n}2^{-1}$

SEMPLIFICANDO $\Leftrightarrow 1 \leq \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow n+1 \geq 2 \Leftrightarrow$

$n \geq 1$ OK! $[(n+1)! = (n+1)\cdot n!]$