Calcolo Differenziale – Seconda prova scritta 10/02/2014	$\boxed{2}$
COGNOME:	NOME:

Nei primi 3 esercizi mettete solo una croce su vero $\boxed{\text{V}}$ o falso $\boxed{\text{F}}$, nel caso vogliate cambiare la risposta utilizzate $\boxed{\text{v}}$ o $\boxed{\text{f}}$. In questo tipo di esercizi le risposte errate verranno penalizzate. Nelle domande aperte l'esercizio va svolto in modo completo, in particolare indicate nello svolgimento la parte di teoria che utilizzate.

Esercizio n. 1 – Sia $f(x) = e^{-\sin(x)}$

i) La funzione f è periodica in $\mathbb{R}$ $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

ii) Esiste $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\cancel{\text{F}}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

iii) l'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\cancel{\text{F}}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

Esercizio n. 2 – Sia $f(x) = x^2 + \cos^2(x)$

i) f ammette max assoluto in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\cancel{\text{F}}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

ii) f ammette min assoluto in $\mathbb{R}$ $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

iii) f è convessa in tutto $\mathbb{R}$ $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

Esercizio n. 3 –

i) l'equazione $e^x + 7x = 0$ ammette 2 soluzioni in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\cancel{\text{F}}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

ii) l'equazione $e^x - 2 + x^2 = 0$ ammette almeno 2 soluzioni in $\mathbb{R}$ $\boxed{\cancel{\text{V}}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

iii) l'equazione $\ln(x) - x = 0$ ammette almeno una soluzione in $(0, +\infty)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\cancel{\text{F}}}$ $\boxed{\text{v}}$ $\boxed{\text{f}}$

Domande aperte

ESERCIZIO 4 Sia $f(x) = 2\arctan(x) + \frac{1}{x}$. Studiare i limiti di f per $x \to 0$, per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. Determinare eventuali punti di massimo relativo e assoluto. **SVOLGIMENTO**

$\lim\limits_{x\to0^+} 2\text{arctg}(x)+\frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} 2\text{arctg}(x)+\frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2\text{arctg}(x)+\frac{1}{x} = \pi$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\text{arctg}(x)+\frac{1}{x} = -\pi$

$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2(1+x^2)}$ IL SEGNO DIPENDE DA QUELLO DEL NUMERATORE

$x^2 - 1 > 0 \iff x > 1$ o $x < -1 \implies x = -1$ PUNTO DI MAX RELATIVO $f(-1) = 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 1 - \frac{\pi}{2}$

$x = 1$ PUNTO DI MIN RELATIVO $f(1) = 1 + \frac{\pi}{2}$

$\nexists$ MAX e MIN ASSOLUTO

ESERCIZIO 5 Sia f la funzione definita in tutto $\mathbb{R}$ nel modo seguente
$f(x) = e^{Ax} - \cos(x)$ in $[0, +\infty)$ e $f(x) = x^2 + Bx + B$ in $(-\infty, 0)$. dove A, B sono due parametri reali.
Per quali valori dei parametri f risulta continua in tutto $\mathbb{R}$?
Per quali valori dei parametri f risulta derivabile in tutto $\mathbb{R}$?. **SVOLGIMENTO**

L'UNICO PUNTO DA CONSIDERARE E' $x=0$ IN QUANTO IN TUTTI GLI ALTRI PUNTI f RISULTA CONTINUA E DERIVABILE $\forall A, B \in \mathbb{R}$. IN $x=0$ DEVE ESSERE $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0$. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = B \Rightarrow f$ E' CONTINUA $\Leftrightarrow B = 0$ A QUALUNQUE

SOTTO QUESTA CONDIZIONE ($B=0$, $A \in \mathbb{R}$) AFFINCHE' f SIA DERIVABILE DEVE ESSERE $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) \Rightarrow A = B$

QUINDI f E' DERIVABILE $\Leftrightarrow$ $A = B = 0$

ESERCIZIO 6 Calcolare $\lim_{x \to 0+} \frac{sin(x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x}}$ **SVOLGIMENTO**

QUESTO LIMITE SI PUO' TRATTARE IN VARI MODI, DE L'HOPITAL, SVILUPPO DI TAYLOR DI $\sin(x)$ O SEMPLICEMENTE USANDO IL LIMITE NOTEVOLE $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x) - x^2}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \left[\frac{\sin(x)}{x} - x \right] = 0 \, [1 - 0] = 0$$

ESERCIZIO 7 Determinare esplicitamente una funzione che ammetta asintoto verticale $x = 2$ e asintoto orizzontale $y = 1$ per x che tende a $+\infty$. **SVOLGIMENTO**

UN ESEMPIO E' DATO DALLA FUNZIONE

$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\quad y = 1$ AS. ORIZ.

$\lim_{x \to 2^\pm} 1 + \frac{1}{x-2} = \pm\infty$ $\quad x = 2$ AS. VERTIC.