Calcolo Differenziale – Seconda prova in itinere 19/12/2014 $\boxed{\mathbf{A}}$

COGNOME: ________________ NOME: ________________

Nei primi 3 esercizi mettete solo una croce su vero $\boxed{V}$, falso $\boxed{F}$ o $\boxed{?}$. In questo tipo di esercizi le risposte errate verranno penalizzate. Nelle domande aperte l'esercizio va svolto in modo completo, in particolare indicate nello svolgimento gli argomenti di teoria utilizzati.

Esercizio n. 1 – Siano f e g funzioni definite e derivabili due volte su tutto $\mathbb{R}$. Se f e g sono entrambe convesse allora

i) La funzione prodotto $h(x) := f(x)g(x)$ è convessa $\boxed{V}$ $\boxed{\cancel{F}}$ $\boxed{?}$

ii) La funzione composta $f(g(x))$ è concava $\boxed{V}$ $\boxed{\cancel{F}}$ $\boxed{?}$

Esercizio n. 2 – Sia $f(x) = \log(1 + x^2)$

i) L'equazione $f(x) = 2$ ammette esattamente due soluzioni in $\mathbb{R}$ $\boxed{V}$ $\boxed{\cancel{F}}$ $\boxed{?}$

ii) L'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione in $[0, 1]$ $\boxed{\cancel{V}}$ $\boxed{F}$ $\boxed{?}$

Esercizio n. 3 –

i) La funzione $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ è limitata $\boxed{V}$ $\boxed{\cancel{F}}$ $\boxed{?}$

ii) La funzione $\cancel{f}$ g $(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ è crescente nel suo insieme di definizione $\boxed{V}$ $\boxed{\cancel{F}}$ $\boxed{?}$

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-2}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} < 0$$

Domande aperte

Sia f la funzione definita in tutto $\mathbb{R}$ nel modo seguente

$$f(x) = \begin{cases} (\sin Ax)^2 & \text{se } x \le 0 \\ Bx^2 + Cx + D & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

i) Determinare valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti continua in $(-\infty, +\infty)$

ii) Determinare valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti derivabile in $(-\infty, +\infty)$

iii) Determinare valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti limitata in $(-\infty, +\infty)$

iiv) Determinare valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti convessa in $(-\infty, +\infty)$

i) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = D$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow D = 0$, f CONTINUA $\iff D = 0$ $A, B, C \in \mathbb{R}$

ii) $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = C$ $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 \Rightarrow C = 0$, f DERIV. IN $x = 0 \iff$ $D = 0, C = 0$ $A, B \in \mathbb{R}$

iii) $|f(x)| \le 1$ $\forall x \le 0$, PER $x > 0$ $f(x)$ E' LIMITATA $\iff B = C = 0$

QUINDI f LIMITATA $\iff B = 0$ $C = 0$ $A, D \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO 5 Sia $f(x) = \sqrt{\cancel{2}^{4} e^x + e^{-x}}$.
i) f ha punti di minimo assoluto su $\mathbb{R}$? f ha punti di massimo assoluto su $\mathbb{R}$?
ii) Determinare il codominio di f

i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \nexists$ MAX ASSOLUTO MENTRE $\exists$ MIN ASS.

ii) $f'(x) = \dfrac{4e^x - e^{-x}}{2\sqrt{4e^x + e^{-x}}} \rightsquigarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4e^x > e^{-x} \Leftrightarrow 4e^{2x} > 1$

$\Leftrightarrow e^{2x} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x > \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \to x > -\ln(2)$

$x = -\ln(2)$ PUNTO DI MINIMO $f(-\ln(2))$ E' IL MINIMO

$f(-\ln(2)) = \sqrt{2+2} = 2$

IL CODOMINIO O IMMAGINE E' $[2, \infty)$

ESERCIZIO 6 Consideriamo la seguente successione definita per ricorrenza $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n^2 + 3$.
i) Dimostrare che la successione è monotona crescente;
ii) calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

i) $a_{n+1} = 2a_n^2 + 3 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 2a_n^2 + 3 - a_n > 0$?

CONSIDERIAMO $2x^2 - x + 3 > 0$ QUESTA E' VERIFICATA $\forall x$

IN QUANTO $\Delta = 1 - 24 < 0 \Rightarrow 2a_n^2 + 3 - a_n > 0$ $\forall$ VALORE DI a_n

QUINDI $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ E' CRESCENTE

ii) DA i) SEGUE CHE $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n$. SE $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$

SI AVREBBE PASSANDO AL LIMITE NELL' EQ $a_{n+1} = 2a_n^2 + 3$

$\ell = 2\ell^2 + 3$ MA ABBIAMO VISTO CHE L'EQU $2\ell^2 - \ell + 3 = 0$

NON HA SOLUZ. QUINDI $\nexists\, \ell \in \mathbb{R}$.

DA QUESTO DEDUCIAMO

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$