

COGNOME: _____

NOME: _____

Nei primi 3 esercizi mettete solo una croce su vero ☐ V, falso ☐ F o ☐ ?. In questo tipo di esercizi le risposte errate verranno penalizzate. Nelle domande aperte l'esercizio va svolto in modo completo, in particolare indicate nello svolgimento gli argomenti di teoria utilizzati.

Esercizio n. 1 – Sia $f(x) = \arctan(x^2)$

i) L'equazione $f(x) = 2$ ammette esattamente due soluzioni in $\mathbb{R}$ ☐ V ☒ F ☐ ?

ii) L'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione in $[0, 1]$ ☒ V ☐ F ☐ ?

Esercizio n. 2 – Siano f e g funzioni definite e derivabili due volte su tutto $\mathbb{R}$. Se f e g sono entrambe convesse allora

i) La funzione composta $f(g(x))$ è concava ☐ V ☒ F ☐ ?

ii) La funzione prodotto $h(x) := f(x)g(x)$ è convessa ☐ V ☒ F ☐ ?

Esercizio n. 3 –

i) La funzione $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ è limitata nel suo insieme di definizione ☒ V ☐ F ☐ ?

ii) La funzione $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ è decrescente nel suo insieme di definizione ☐ V ☒ F ☐ ?

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2}$$

Domande aperte

Sia f la funzione definita in tutto $\mathbb{R}$ nel modo seguente

$$f(x) = \begin{cases} (\cos Ax)^2 & \text{se } x \leq 0 \\ Bx^2 + Cx + D & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- Determinare valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti continua in $(-\infty, +\infty)$
- Determinare valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti derivabile in $(-\infty, +\infty)$
- Determinare valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti limitata in $(-\infty, +\infty)$
- Determinare valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti convessa in $(-\infty, +\infty)$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = D \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \Rightarrow D = 1, f \text{ continua} \Leftrightarrow D = 1 \quad A, B, C \in \mathbb{R}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = C \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0 \Rightarrow C = 0, f \text{ deriv. in } x=0 \Leftrightarrow D=1, C=0, A, B \in \mathbb{R}$$

$$iii) |f(x)| \leq 1 \quad \forall x \leq 0, \text{ per } x > 0 \quad f(x) \text{ è limitata} \Leftrightarrow B = C = 0$$

$$\text{buoi)} f \text{ limitata} \Leftrightarrow B = 0 \quad C = 0 \quad A, D \in \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 5 Sia $f(x) = \sqrt[4]{2e^x + e^{-x}}$.

- i) f ha punti di minimo assoluto su $\mathbb{R}$? f ha punti di massimo assoluto su $\mathbb{R}$?
 ii) Determinare il codominio di f

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \nexists \text{ max assoluto neppure } \exists \text{ min ass.}$

ii) $f'(x) = \frac{4e^x - e^{-x}}{2\sqrt[4]{4e^x + e^{-x}}} \leadsto f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4e^x > e^{-x} \Leftrightarrow 4e^{2x} > 1$

$\Leftrightarrow e^{2x} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x > \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow x > -\ln(2)$

$x = -\ln(2)$ punto di minimo $f(-\ln(2))$ è il minimo

$f(-\ln(2)) = \sqrt[4]{2+2} = 2$

il codominio è immagine è $[2, \infty)$

ESERCIZIO 6 Consideriamo la seguente successione definita per ricorrenza $a_0 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 + 5$.

- i) Dimostrare che la successione è monotona crescente;
 ii) calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

1) $a_{n+1} = a_n^2 + 5 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = a_n^2 + 5 - a_n > 0?$

consideriamo $x^2 - x + 5 > 0$ questa è verificata $\forall x$

in quanto $\Delta = 1 - 20 < 0 \Rightarrow a_n^2 + 5 - a_n > 0 \forall \text{ valore di } a_n$
 quindi $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente

ii) da i) segue che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

si avrebbe passando al limite nell'eq $a_{n+1} = a_n^2 + 5$
 $l = l^2 + 5$ ma abbiamo visto che l'eq $l^2 - l + 5 = 0$
 non ha soluz. quindi $\nexists l \in \mathbb{R}$.

da questo deduciamo

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$