

COGNOME: _____

NOME: _____

Nei primi 3 esercizi mettete solo una croce su vero ☐ V, falso ☐ F o ☐ ?. In questo tipo di esercizi le risposte errate verranno penalizzate. Nelle domande aperte l'esercizio va svolto in modo completo, in particolare indicate nello svolgimento gli argomenti di teoria utilizzati.

Esercizio n. 1 – Siano f e g funzioni definite e derivabili due volte su tutto $\mathbb{R}$. Se f e g sono entrambe concave allora

i) La funzione prodotto $h(x) := f(x)g(x)$ è concavo ☐ V ☒ F ☐ ?

ii) La funzione composta $f(g(x))$ è convessa ☐ V ☒ F ☐ ?

Esercizio n. 2 – Sia $f(x) = \log(1+x^2)$

i) L'equazione $f(x) = 2$ ammette esattamente due soluzioni in $\mathbb{R}$ ☐ V ☒ F ☐ ?

ii) L'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione in $[0, 1]$ ☒ F ☐ V ☐ ?

Esercizio n. 3 –

i) La funzione $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ è limitata nel suo insieme di definizione ☐ V ☒ F ☐ ?

ii) La funzione $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ è decrescente nel suo insieme di definizione ☒ F ☐ V ☐ ?

$\downarrow g$

Domande aperte

Sia f la funzione definita in tutto $\mathbb{R}$ nel modo seguente

$$f(x) = \begin{cases} (\sin Ax)^2 & \text{se } x \leq 0 \\ Bx^2 + Cx + D & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

i) Determinare valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti continua in $(-\infty, +\infty)$

ii) Determinare valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti derivabile in $(-\infty, +\infty)$

iii) Determinare valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti limitata in $(-\infty, +\infty)$

iv) Determinare valori dei parametri $A, B, C \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione risulti convessa in $(-\infty, +\infty)$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = D$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow D=0$, f continua $\Leftrightarrow D=0$ $A, B, C \in \mathbb{R}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = C$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0 \Rightarrow C=0$, f deriv. in $x=0 \Leftrightarrow D=0, C=0, A, B \in \mathbb{R}$

iii) $|f(x)| \leq 1 \quad \forall x \leq 0$, per $x > 0$ $f(x)$ è limitata $\Leftrightarrow B=C=0$

iv) f limitata $\Leftrightarrow B=0, C=0$ $A, D \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-2}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} < 0$$

ESERCIZIO 5 Sia $f(x) = \sqrt{e^x + 2e^{-x}}$.

- f ha punti di minimo assoluto su $\mathbb{R}$? f ha punti di massimo assoluto su $\mathbb{R}$?
- Determinare il codominio di f

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x + 2e^{-x}} = +\infty \Rightarrow \nexists \text{ max assoluto neppure } \exists \text{ min ass.}$

1) $f'(x) = \frac{e^x - 4e^{-x}}{2\sqrt{e^x + 4e^{-x}}} \leadsto f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 4e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} > 4$

$\Leftrightarrow e^{2x} > 4 \Leftrightarrow 2x > \ln(4) \Leftrightarrow x > \ln(2) \rightarrow x > \ln(2)$

$x = \ln(2)$ punto di minimo $f(\ln(2))$ e' il minimo

$f(\ln(2)) = \sqrt{2+2} = 2$

il codominio o immagine e' $[2, \infty)$

ESERCIZIO 6 Consideriamo la seguente successione definita per ricorrenza $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n^2 + 5$.

- Dimostrare che la successione è monotona crescente;
- calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

1) $a_{n+1} = a_n^2 + 5 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = a_n^2 + 5 - a_n > 0?$

consideriamo $x^2 - x + 5 > 0$ questa e' verificata $\forall x$

in quanto $\Delta = 1 - 20 < 0 \Rightarrow a_n^2 + 5 - a_n > 0 \forall \text{ valore di } a_n$
 quindi $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e' crescente

ii) da i) segue che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

si avrebbe passando al limite nell'eq $a_{n+1} = a_n^2 + 5$

$l = l^2 + 5$ ma abbiamo visto che l'eq $l^2 - l + 5 = 0$
 non ha soluz. quindi $\nexists l \in \mathbb{R}$.

da questo deduciamo

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$