

Tutoraggio - Calcolo I (Sviluppi di Taylor – Studio di funzioni)

1. Utilizzando gli sviluppi di Taylor, calcolare i seguenti limiti

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\ln(1+x)}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$.
- d) * $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \sin \frac{1}{x}\right) \right)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{1+\tan^2 x} - 5}{1 - \cos x}$.

2. Studiare le seguenti funzioni tracciandone, inoltre, un grafico qualitativo:

- a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$, $f(x) = xe^{\frac{x}{x-2}}$,
- b) $f(x) = e^{-x} - e^{-3x}$ (verificare in particolare che f ha un unico punto di flesso x_0 , determinare il più grande intervallo contenente x_0 in cui f è invertibile e calcolare $(f^{-1})'(f(x_0))$),
- c) $f(x) = \ln x - \arctan(x-1)$ (determinare in particolare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$),
- d) $f(x) = \frac{x^2}{1-3x-x|x|}$ (determinare in particolare il numero di soluzioni di $f(x) = -1$ e l'immagine della funzione),
- e) $f(x) = \frac{x^2}{\ln|x|-1}$ (determinare in particolare l'immagine della funzione e, posto $f(0) = 0$, discutere la continuità e la derivabilità in $x = 0$ di f),
- f) $f(x) = (x-1)^3(2-x)$,
- g) * Considerate le funzioni $g_1(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ e $g_2(x) = \sqrt[3]{|f(x)|}$ (dove f è la funzione definita nell'esercizio precedente) si determinino, per ciascuna di esse, i punti di estremo e i punti di non derivabilità.

3. * Si studino anche le seguenti funzioni

- a) $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2-4}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f(x) = 2x + \sqrt{x^2-1}$, $f(x) = 2^x - 5^x$.
- b) $f(x) = (x^2-1)e^{-|x|}$, $f(x) = \frac{3x+1}{x+1} - 2 \arctan x$, $f(x) = x \frac{2 \ln x - 3}{\ln x - 2}$.