PROP SUPPONIAMO CHE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ SIA

CONVERGENTE $\left(\exists \lim_{k\to+\infty} S_k = \ell \in \mathbb{R} \right)$

ALLORA NECESSARIAMENTE $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

DIM $S_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k$ $\quad S_{k-1} = a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1}$

$\Rightarrow a_k = S_k - S_{k-1} \longrightarrow$ SE $\exists \lim_{k\to+\infty} S_k = \ell$

ALLORA $\exists \lim_{k\to+\infty} S_{k-1} = \ell \Rightarrow$

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} S_k - S_{k-1} = \ell - \ell = 0$$

PROP SIA $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ A TERMINI POSITIVI

ALLORA LA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ E' REGOLARE $\begin{cases} \text{CONVERGE} \\ \text{DIVERGE A } +\infty \end{cases}$

DIM $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ E' CRES., INFATTI

$$S_{k+1} - S_k = a_{k+1} \geq 0 \Rightarrow S_{k+1} \geq S_k$$

LE SUCCESSIONI MONOTONE AMMETTONO LIMITE

OSSERVAZIONE NELLA PROP PRECEDENTE IL LIMITE E' IN $\mathbb{R}$ (CONVERGE) $\iff$ LA SUCC. $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ E' LIMITATA

SE LA SUCC. NON E' LIMITATA ALLORA DIVERGE

<u>OSS</u> SE LA SUCC. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ E' A TERMINI NEGATIVI OPPURE E' DEFINITIVAMENTE A TERMINI POSITIVI O NEGATIVI ALLORA $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ E' REGOLARE

<u>PROP</u> SIANO $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ DUE SUCCES A TERMINI POSITIVI TALI CHE $a_n \leq b_n$ DEFINIT.
($\exists\, \bar{n}$ t.c. $\forall\, n \geq \bar{n}$ $a_n \leq b_n$)
ALLORA SE $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ (CONVERGE) $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (CONVERGE), QUINDI SE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ DIVERGE
NECESSARIAMENTE $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$ DIVERGE

<u>DIM</u> SE $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $t_k = b_0 + b_1 \cdots + b_k$
SOMME PARZIALI, SONO LIMITATE MA ALLORA
$S_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ SONO LIMITATE INFATTI
$k \geq \bar{n}$
$S_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_{\bar{n}-1} + a_{\bar{n}} + a_{\bar{n}+1} + \cdots + a_k \leq a_0 + a_1 + \cdots a_{\bar{n}-1} +$
$b_{\bar{n}} + b_{\bar{n}+1} + \cdots b_k = S_{\bar{n}-1} - t_{\bar{n}-1} + t_k = C + t_k$

C COSTANTE FISSATA, DA CUI $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ LIMITATA
$\Rightarrow$ $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ LIMITATA

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+5}$$

$$\frac{2^n+1}{3^n+5} < \frac{2^n+1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{MA}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+5} < \infty$$

<u>PROP</u> SIANO $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ SUCC. A TERMINI POSITIVI

SE $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in (0,+\infty)$ [N.B. $l \neq 0$]

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$$

<u>DIM</u> $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in (0,+\infty) \Rightarrow \exists \bar{n}$ t.c.

$\forall n > \bar{n} \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \frac{l}{2} \quad \left(\varepsilon = \frac{l}{2}\right)$

$$\Rightarrow l - \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < l + \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2} l \Rightarrow$$

$$\frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} l\, b_n$$

QUINDI LA TESI SEGUE DALLA PROP. PRECEDENTE

IN QUESTO CASO N.B. SI HA $\boxed{\iff}$ STESSO COMPORTAMENTO PER $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ E $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} +\infty & \alpha \leq 1 \\ <\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$ (NO DIMOSTRAZIONE)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^5+6n+1} \quad ? \qquad a_n = \frac{n^2+4}{n^5+6n+1}$$

$b_n = ?$ $\quad b_n = \frac{1}{n^3}$, INFATTI

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2+4}{n^5+6n+1} \cdot \frac{n^3}{1} = \frac{n^5+4n^3}{n^5+6n+1} \longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

DAL MOMENTO CHE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^5+6n+1} < +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad b_n = ? \longrightarrow b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1 \longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow \sum_{n=1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) < \infty$$

CRITERIO DELLA RADICE

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ A TERMINI POSITIVI

SE $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} <1 & \text{CONVERGE} \\ >1 & \text{DIVERGE} \\ =1 & ??? \end{cases}$

DIM SE $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \; \exists \, n_\varepsilon$ t.c.

$\forall n > n_\varepsilon \qquad |\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon \Rightarrow$

$$l-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l+\varepsilon$$

1) CASO SE $l<1$ POSSO SCEGLIERE ε IN MODO CHE $l+\varepsilon<1$ E ALLORA

$\sqrt[n]{a_n} < l+\varepsilon = \underset{\boxed{c<1}}{c} \Rightarrow a_n < c^n$, SAPPIAMO CHE SE $c<1$

$\sum_{n=0}^{\infty} c^n < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$

2) CASO $l>1$ POSSO PRENDERE ε t.c. $\underbrace{l-\varepsilon}_{b} > 1$

$b>1$

$b < \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow a_n > b^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ IN QUANTO

$\sum_{n=0}^{+\infty} b^n = +\infty$ SE $b>1$

CRITERIO DEL RAPPORTO

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ TERMINI POSITIVI

SE $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} <1 & \text{CONVERGE} \\ >1 & \text{DIVERGE} \\ =1 & ??? \end{cases}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n!} \qquad a_n = \frac{n^2+3}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+3}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+3}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^2+3} = \frac{n^2+2n+4}{(n^2+3)(n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$