

Metodi Matematici nel Trattamento delle Immagini

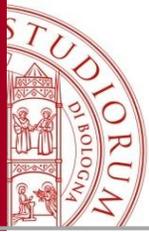
15-16 Gennaio 2013, Roma, IT

Sfruttamento della Proprietà di Bianchezza del Rumore nella Restoration di Immagini

Alessandro Lanza

Università di Bologna, Italia

CIRAM - Dipartimento di Matematica



Sommario

1. Considerazioni generali e Motivazioni
2. Sfruttamento della proprietà di bianchezza del rumore:
 1. per la rilevazione del grado di tessitura in immagini
 2. per la rimozione del rumore in immagini
3. Conclusioni e sviluppi futuri

Problema della Restoration

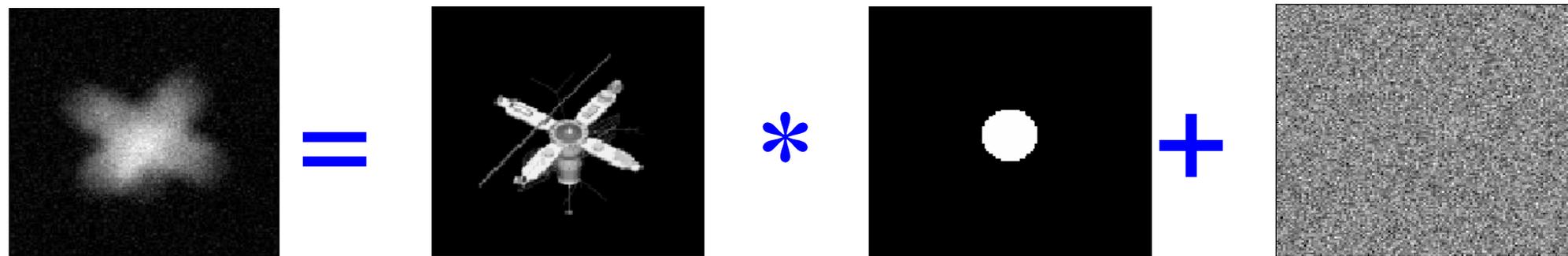


Immagine
osservata

f

Immagine
originale
(non nota)

u

Point Spread
Function
(nota/non nota)

k

Immagine
rumore
(non nota)

e

Scopo: Data f , trovare una stima di u

Modello di degradazione

Continuo:

$$f(x) = \iint_{\Omega} k(x, y)u(y)dy + e(x) \quad x \in \Omega$$

Immagine osservata

Immagine originale

Immagine rumore

Point Spread Function

L'equazione integrale può essere espressa come segue:

$$f = k * u + e$$



Approccio Variazionale

Minimizza il funzionale energia:

$$E(u) = \left\{ \int_{\Omega} \Phi((k * u - f)^2) + \lambda R(|\nabla u|^2) dx \right\}$$

Termine di fedeltà ai dati:
codifica informazioni a priori sul residuo, cioè sul rumore (media, varianza)

Termine di regolarizzazione:
codifica informazioni a priori sulla immagine originale (smoothness)

$$\Phi(s^2) = s^2$$

$$R(s^2) = s^2$$

Tikhonov

$$R(s^2) = \sqrt{s^2 + \varepsilon^2}$$

TV

$$R(s^2) = \rho^2 \ln(1 + s^2 / \rho^2)$$

Perona – Malik

Approccio Variazionale

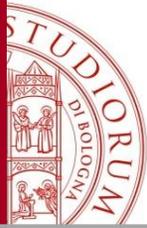
Minimizza il funzionale energia:

$$E(u) = \left\{ \int_{\Omega} \Phi((k * u - f)^2) + \lambda R(|\nabla u|^2) dx \right\}$$

Termine di fedeltà ai dati:
codifica informazioni a priori sul residuo, cioè sul rumore (media, varianza)

Termine di regolarizzazione:
codifica informazioni a priori sulla immagine originale (smoothness)

IDEA: sfruttare, tra le informazioni a priori circa il rumore, oltre alle classiche media e varianza anche la proprietà di bianchezza



Algoritmo Adaptive-Fractional (AF)

Input: immagine degradata f , numero di classi di tessitura C ;

Output: soluzione approssimata $u^{(k)}$

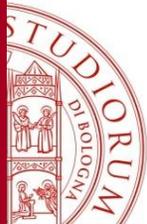
1. $\{\lambda_i, \alpha_i, i = 1; \dots; n^2\} = \mathbf{TD}(f; C)$ calcola i parametri texture-adattivi sull'immagine degradata f ;
2. Inizializza il procedimento iterativo settando $u^{(0)} = f$;
3. For $k = 1, 2, \dots$ fino a convergenza, risolvi

$$\left[\left(G^\alpha \right)^T \hat{\Lambda} \hat{D}_\beta \left(u^{(k)} \right) G^\alpha + K^T D_\gamma \left(u^{(k)} \right) K \right] u^{(k+1)} = K^T D_\gamma \left(u^{(k)} \right) f$$

endfor

Rilevamento del grado di tessitura in immagini tramite l'autocorrelazione normalizzata del residuo

R. H. Chan, A. Lanza, S. Morigi, F. Sgallari. "An Adaptive Strategy for the Restoration of Textured Images using Fractional Order Regularization". In print, Numerical Mathematics: Theory, methods and applications (NMTMA), 2012.



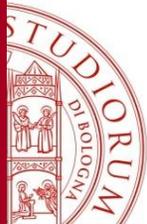
Metodo di Texture Detection

IPOTESI: il rumore additivo è la realizzazione di un processo stocastico **bianco** (il rumore non è auto-correlato); ipotizzeremo anche che il rumore non sia correlato con l'immagine originale.

Nessuna ipotesi circa la forma della distribuzione del rumore, nè circa il valore della sua varianza.

La nostra idea:

Usare la funzione di auto-correlazione del residuo per rilevare la non-bianchezza nei dati



Metodo di Texture Detection

Partendo dall'immagine osservata (degradata), i.e. $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{f}$, applichiamo un semplice flusso TV con condizioni al contorno spaziali Neumann omogenee:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \tau \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \mathbf{u}^{(k)}}{|\nabla \mathbf{u}^{(k)}|} \right)$$

che "approccia" un'immagine costante a tratti, detta "cartoon model", $\mathbf{u}^{(k)}$.

Le parti "oscillatorie" rimosse dal flusso TV sono il **rumore**, \mathbf{e} , e la parte

"non-cartoon", o parte **texture**, \mathbf{u}_{nc}

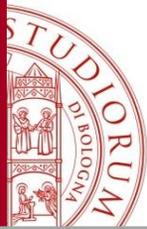


Metodo di Texture Detection

Data questa decomposizione, l'immagine residuo al passo k si può scrivere:

$$r^{(k)} := f - u^{(k)} = u_{nc} + e$$

- La sequenza $u^{(k)}$ converge asintoticamente verso l'immagine costante uguale al valor medio dell'immagine osservata \bar{f} , il corrispondente residuo $r^{(k)}$ tende quindi a $f - \bar{f}$.
- Vogliamo fermare il flusso TV ad una scala caratteristica $\tilde{\kappa}$ che permetta un buon rilevamento della texture u_{nc}
- Proponiamo di trovare $\tilde{\kappa}$ tramite la funzione di autocorrelazione del residuo $r^{(k)}$



Metodo di Texture Detection

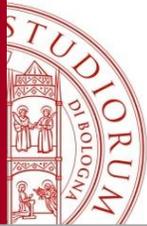
Definiamo la **funzione di auto-correlazione** del processo discreto bianco E :

$$\rho_e[l, m] = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{E}[E_{i,j} E_{i+l, j+m}] = \begin{cases} 1 & \text{if } (l, m) = (0, 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad l, m, 0, 1, \dots, n-1$$

ρ_e è ben stimata dalla **funzione di auto-correlazione campionaria** :

$$\hat{\rho}_e[l, m] = \frac{1}{n^2 \hat{\sigma}^2} \sum_{i,j=1}^n e_{i,j} e_{i+l, j+m} = \begin{cases} 1 & \text{if } (l, m) = (0, 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad l, m = 0, 1, \dots, n-1$$

$\hat{\sigma}^2$ *varianza campionaria della realizzazione del processo (residuo).*

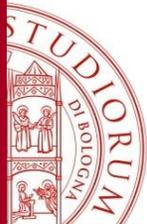


Scelta della scala caratteristica

In particolare, per trovare la scala caratteristica \tilde{k} a cui rilevare la texture, usiamo la seguente energia di auto-correlazione del residuo:

$$J_{r^{(k)}} := \max_{[l,m] \neq [0,0]} \left| \hat{\rho}_r^{(k)} [l,m] \right|$$

se il residuo coincide con una realizzazione di un processo stocastico bianco (rumore bianco), l'energia risulta uguale a zero!



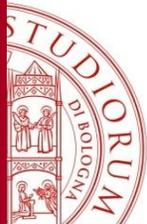
Scelta della scala caratteristica

In particolare, per trovare la scala caratteristica \tilde{k} a cui rilevare la texture, usiamo la seguente energia di auto-correlazione del residuo:

$$J_{r^{(k)}} := \max_{[l,m] \neq [0,0]} \left| \hat{\rho}_r^{(k)} [l,m] \right|$$

Per un'immagine contenente texture, **inizialmente**, il flusso TV genera un residuo dato principalmente dal rumore filtrato, così che la **energia di auto-correlazione** $J_{r^{(k)}}$ **diminuisce**.

Non appena la parte **texturata** u_{nc} **inizia a contaminare il residuo**, l'energia $J_{r^{(k)}}$ **inizia a crescere** poichè le texture sono tipicamente **auto-correlate**.

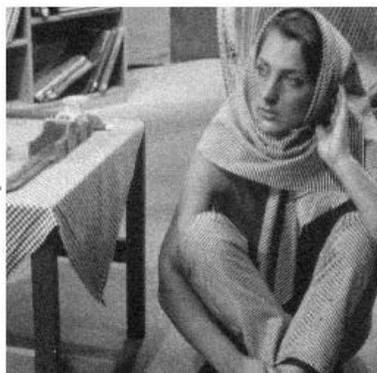


Scelta della scala caratteristica

In particolare, per trovare la scala caratteristica \tilde{k} a cui rilevare la texture, usiamo la seguente energia di auto-correlazione del residuo:

$$J_{r^{(k)}} := \max_{[l,m] \neq [0,0]} \left| \hat{\rho}_r^{(k)} [l,m] \right|$$

Idea: trovare la scala caratteristica \tilde{k} che rende l'energia di auto-correlazione del residuo $J_{r^{(k)}}$ minima



(a) $u^{(20)}$



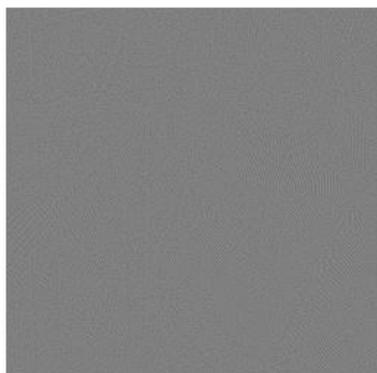
(b) $u^{(80)}$



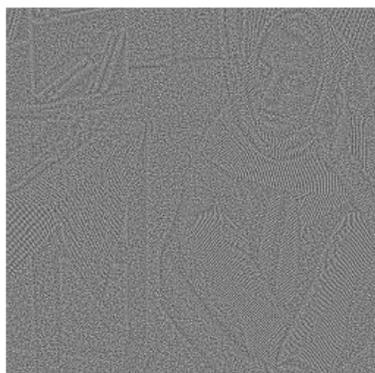
(c) $u^{(120)}$



(d) $u^{(180)}$



(a) $r^{(20)}$



(b) $r^{(80)}$



(c) $r^{(120)}$



(d) $r^{(180)}$



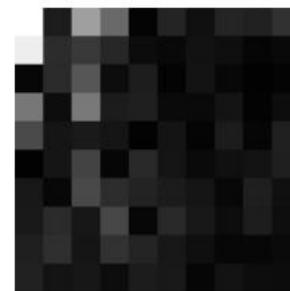
(a) $\widehat{\rho_r^{(20)}}$



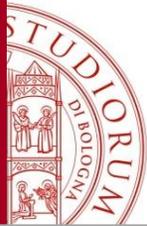
(b) $\widehat{\rho_r^{(80)}}$



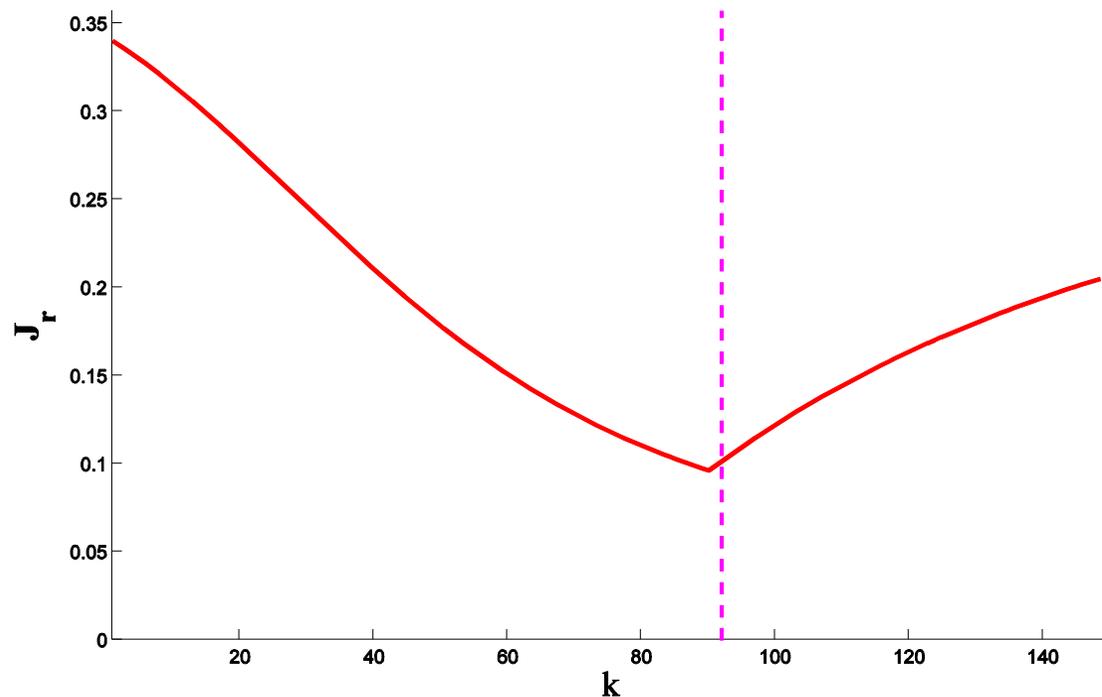
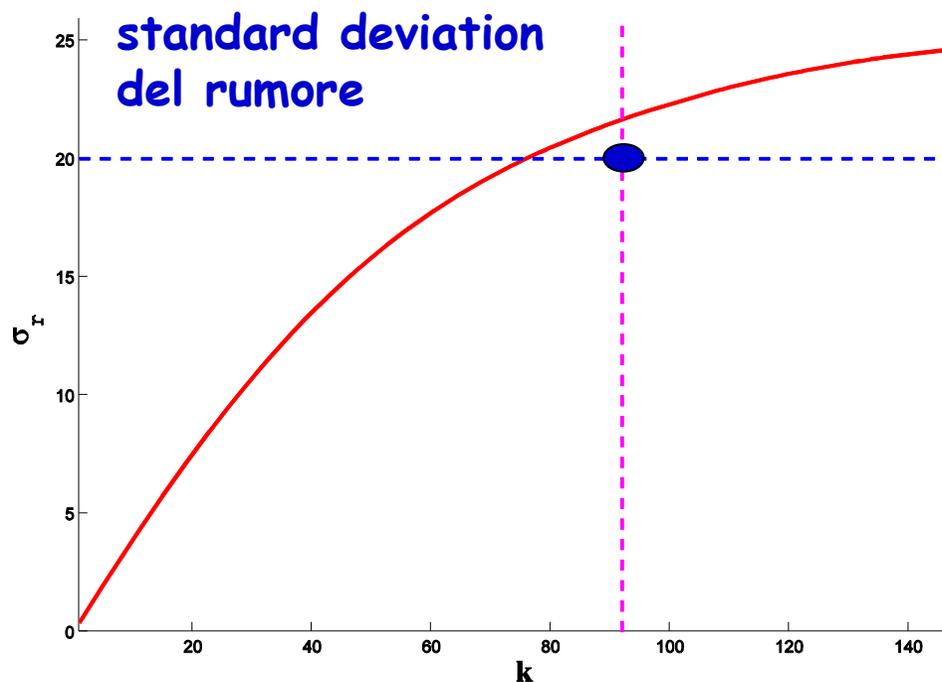
(c) $\widehat{\rho_r^{(120)}}$



(d) $\widehat{\rho_r^{(180)}}$



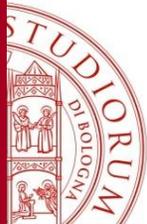
Scelta della scala caratteristica



Standard deviation

dell'immagine residuo

auto-correlation energy

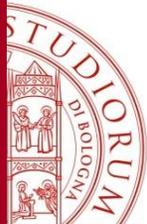


Rilevamento del grado di texture-ness

Una volta selezionata la scala caratteristica $\tilde{\kappa}$, assegniamo, come **misura del grado di texture-ness in un pixel**, l'energia **locale** di auto-correlazione del residuo definita, formalmente, allo stesso modo di quella usata precedentemente per la scelta della scala caratteristica

$$J_{r^{(k)}} = \max_{[l,m] \neq [0,0]} \left| \hat{\rho}_r^{(k)} [l,m] \right|$$

ma calcolata localmente in un intorno del pixel considerato.

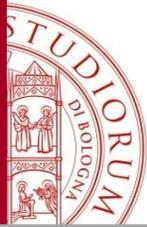


Algoritmo di Texture detection

Input: immagine degradata f , numero di classi di tessitura C ;

Output: parametri texture-adattivi $\lambda_i, \alpha_i, i = 1, \dots, n^2$;

1. Inizializza il processo iterativo $u^{(0)} = f$;
2. **Repeti**
3. $u^{(k+1)} = TV(u^{(k)})$: esegui un passo del flusso TV
4. $r^{(k+1)} = f - u^{(k+1)}$: calcolo il residuo
5. $\rho_{r^{(k+1)}}$: calcola la funzione di auto-correlazione del residuo
6. $J_{r^{(k+1)}}$: calcola l'energia di auto-correlazione del residuo
7. **Finchè** $J_{r^{(k+1)}} > J_{r^{(k)}}$
8. $\tilde{k} := k$ Scala caratteristica al primo minimo locale;
9. $T = \text{ComputeTextureMeasure}(u^{(\tilde{k})})$ con T a valori in $[0, 1]$;
10. Partiziona T in C classi T_1, T_2, \dots, T_C ;
11. Assegna (λ_i, α_i) sulla base di T_i per $i = 1, \dots, C$.



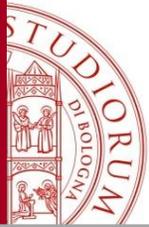
Algoritmo di Texture detection

L'auto-correlazione del residuo $\rho_{r(k)}$ è calcolata tramite 2D-FFT, complessità $O(\tilde{k} n^2 \log n_2)$ per una scala caratteristica \tilde{k} .

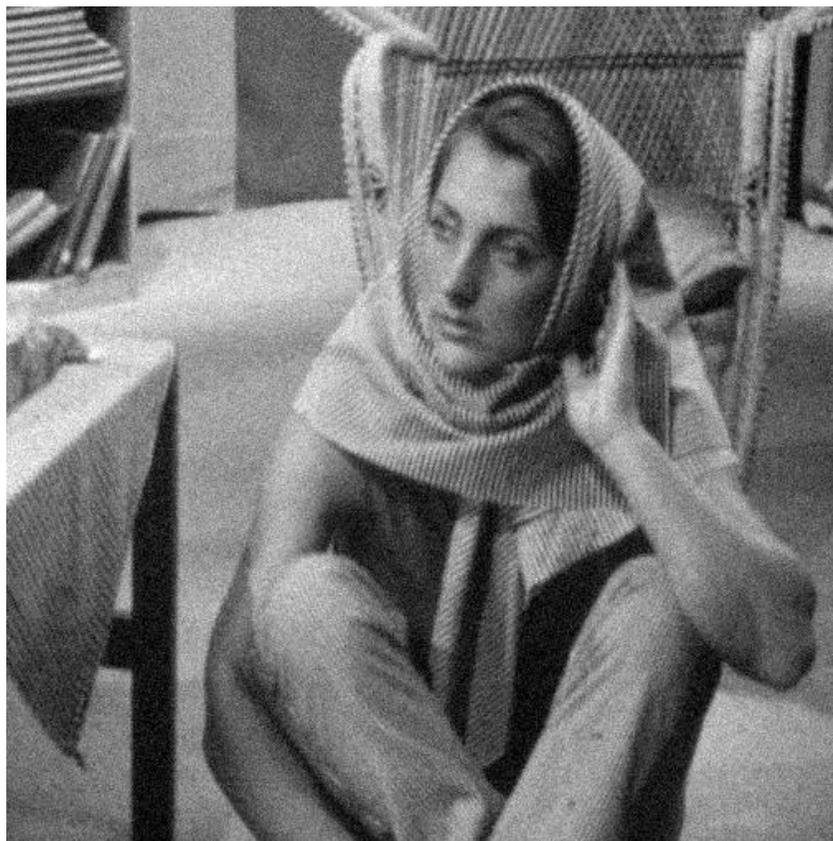
4. $r^{(k+1)} = f - u^{(k+1)}$: compute the residue
5. $\rho_{r(k+1)}$: **calcola la funzione di auto-correlazione del residuo**
6. $J_{r(k+1)}$ compute the residue auto-correlation energy by
7. until $J_{r(k+1)} > J_{r(k)}$
8. characteristic scale found at the first local minimum:
9. **T = ComputeT extureMeasure ($u^{(\tilde{k})}$) con T a valori in [0, 1];**

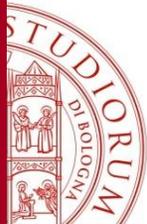
Calcolo di $\rho_{r(k)}$ per ogni pixel in un'intorno di dimensione w (abbiamo usato $w = 21$), usando ancora la 2d-FFT;

20 Complessità $O(n^2 w^2 \log w^2)$.

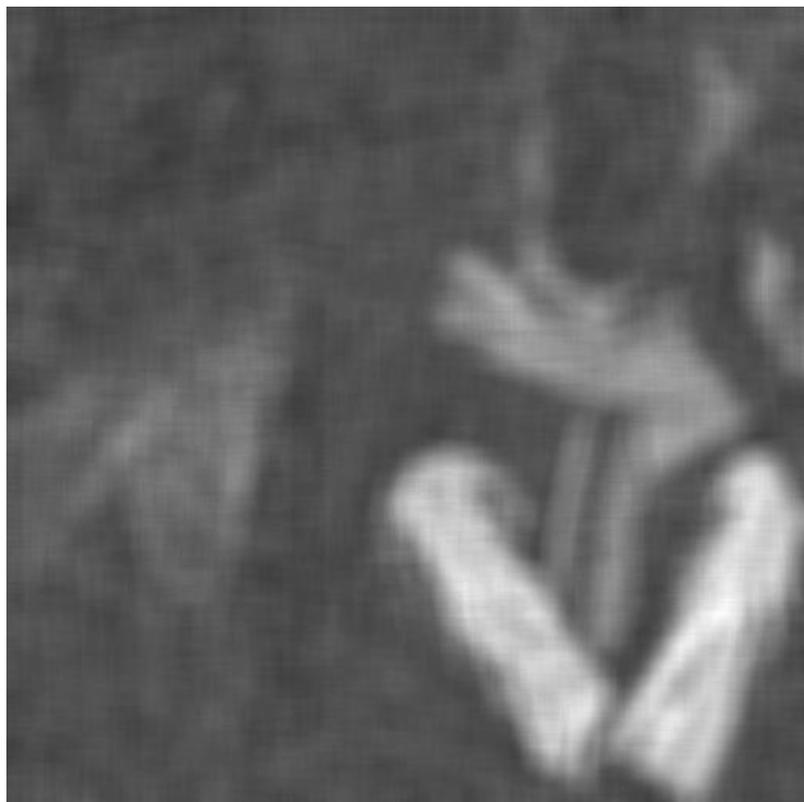


Risultati: mappe di texture-ness





Risultati: mappe di texture-ness



G. Gilboa, Y. Y. Zeevi, and N. Sochen,
Texture preserving variational denoising using
adaptive fidelity term, Proc. Variational and
Level-Set Methods 2003, Nice, France, pp.
137-144, 2003.



TD algorithm, $k=92$,
we used a 21×21 local neighborhood centered at
each pixel for computing variance values and auto-
correlation energy

Mappe scalate linearmente in modo che il massimo valore corrisponda all'intensità 255.

Risultati: classi di texture-ness



immagine originale

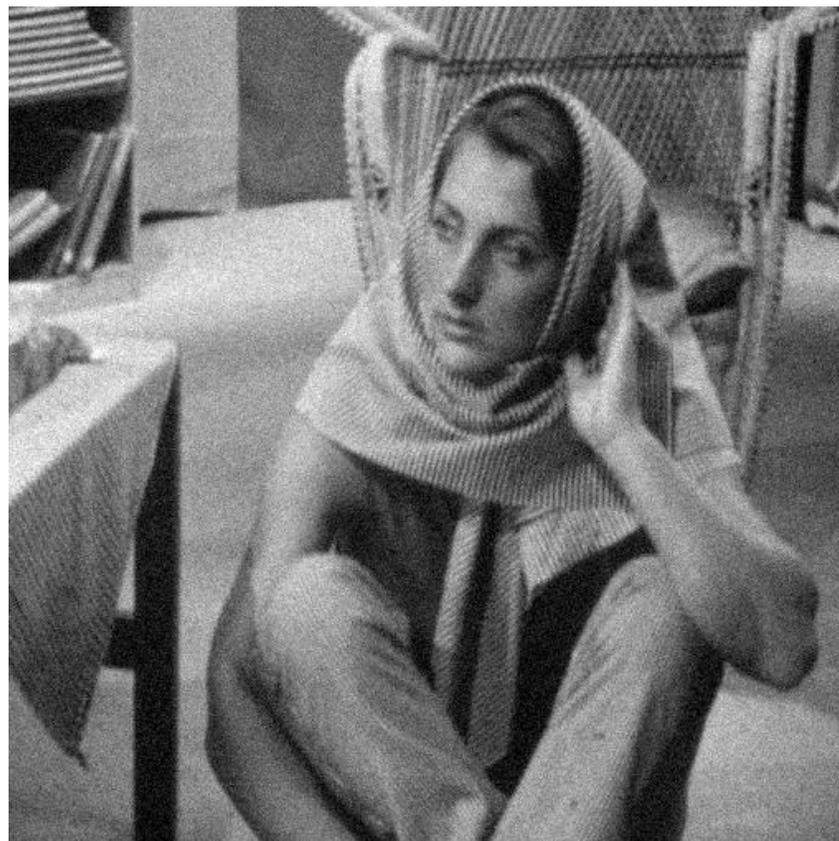


immagine degradata

Gaussian blur, band = 3. sigma = 1.5, 10% Gaussian noise

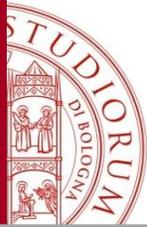
Risultati: classi di texture-ness



classi dall'originale



classi dalla degradata



Risultati: rumore salt-and-pepper

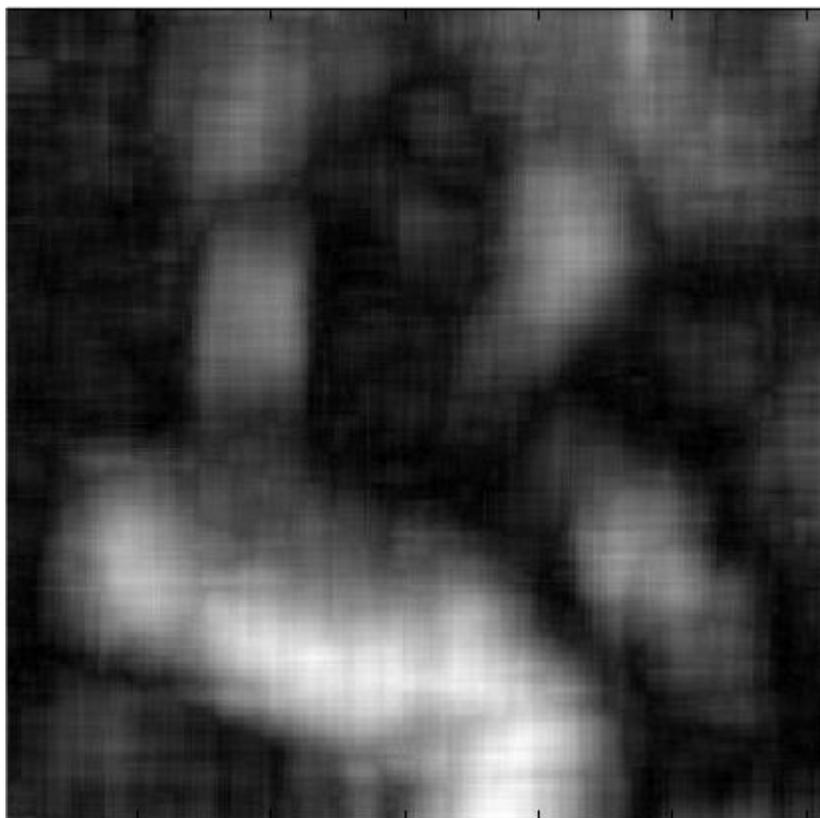
%5 rumore salt-and-pepper

Gaussian blur,
band = 3 , sigma = 1.5

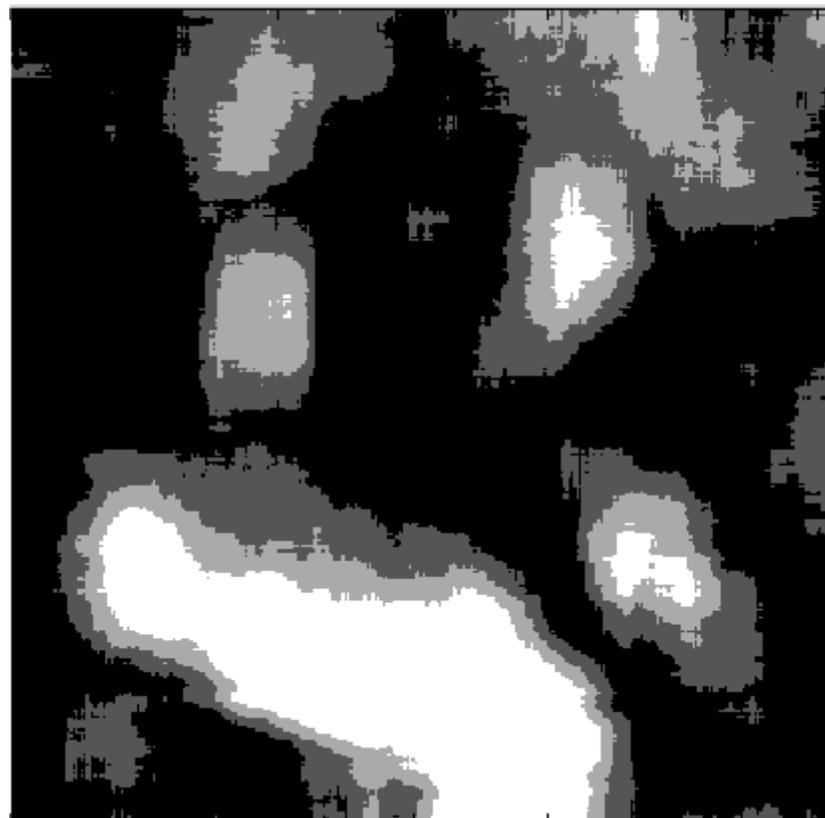


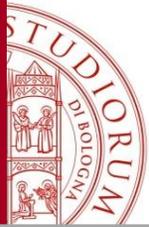
Risultati: rumore salt-and-pepper

mappa di texture-ness



classi di texture-ness





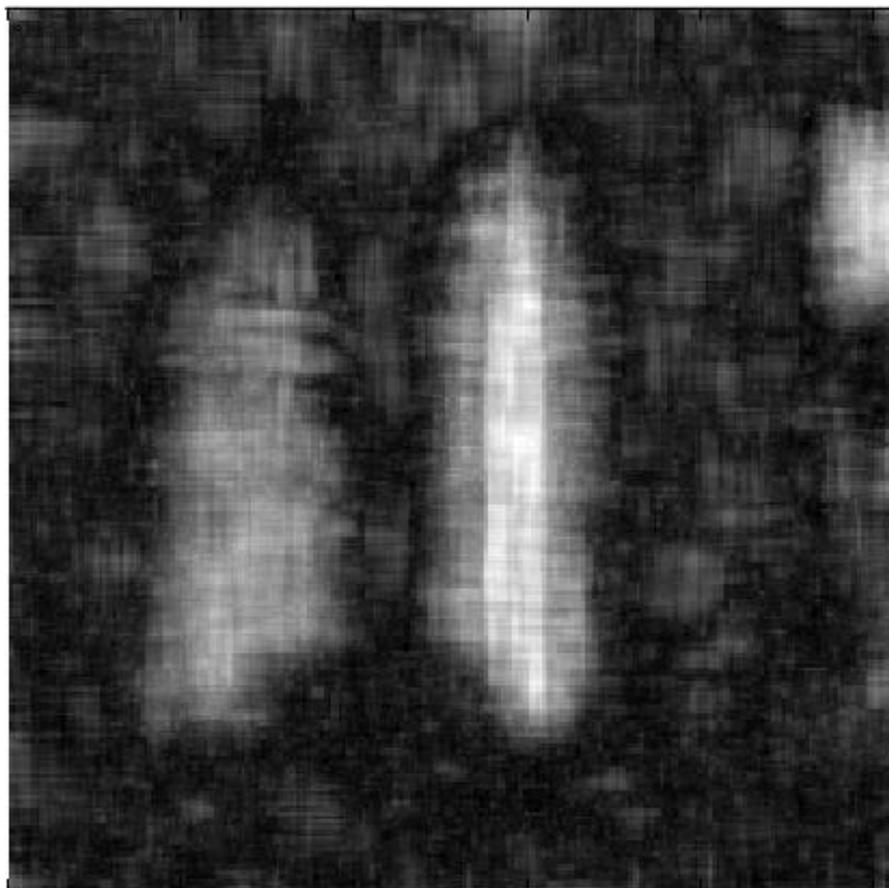
Risultati: rumore Gaussiano

%10 Gaussian noise
Gaussian blur
band = 3 , sigma = 1.5

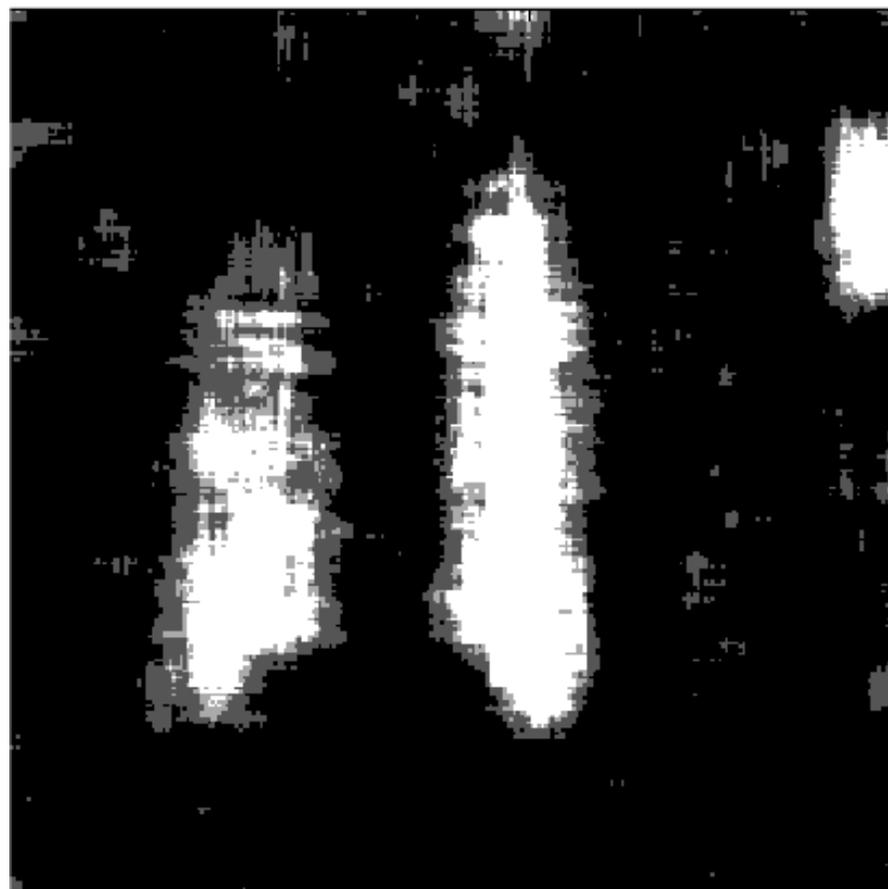


Risultati: rumore Gaussiano

mappa di texture-ness



classi di texture-ness



Rimozione variazionale del rumore in immagini tramite l'utilizzo di termini di penalità sull'autocorrelazione del residuo

A. Lanza, S. Morigi, F. Sgallari, A. J. Yezzi. "Variational Denoising with Auto-Correlation Whiteness Penalties". Accepted for publication, SIAM Journal on Imaging Science, 2013.

Modello di degradazione e ipotesi

Continuo deterministico: $u_0(x, y) = \bar{u}(x, y) + \bar{n}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \in \mathbf{R}^2$

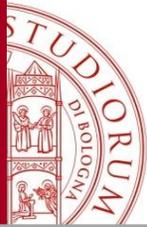
Discreto deterministico: $u_0(i, j) = \bar{u}(i, j) + \bar{n}(i, j), \quad (i, j) \in \Omega \in \mathbf{Z}^2$

immagine osservata
 immagine originale
 immagine rumore

immagine rumore realizzazione del **processo stocastico (p.s.) rumore**:

Discreto probabilistico: $U_0(i, j) = \bar{u}(i, j) + \bar{N}(i, j), \quad (i, j) \in \Omega \in \mathbf{Z}^2$

IPOSTESI: p.s. rumore **BIANCO** (stazionario, a media nulla, non auto-correlato)



Modello di degradazione e ipotesi

Discreto deterministico: $u_0(i, j) = \bar{u}(i, j) + \bar{n}(i, j)$, $(i, j) \in \Omega \in \mathbf{Z}^2$

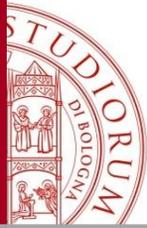
Discreto probabilistico: $U_0(i, j) = \bar{u}(i, j) + \bar{N}(i, j)$, $(i, j) \in \Omega \in \mathbf{Z}^2$

IPOTESI: p.s. rumore BIANCO (stazionario, a media nulla, non auto-correlato)

$$\rho_{\bar{N}}(i_1, j_1, i_2, j_2) = \rho_{\bar{N}}(0, 0, i_2 - i_1, j_2 - j_1)$$

$$= \rho_{\bar{N}}(l, m) = E [\bar{N}(i, j) \bar{N}(i + l, j + m)]$$

$$= \begin{cases} \sigma^2 & \text{if } (l, m) = (0, 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (l, m) \in \Theta$$



Modello di degradazione e ipotesi

Discreto deterministico: $u_0(i, j) = \bar{u}(i, j) + \bar{n}(i, j), \quad (i, j) \in \Omega \in \mathbf{Z}^2$

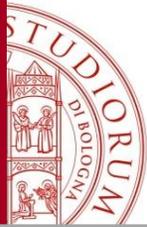
Discreto probabilistico: $U_0(i, j) = \bar{u}(i, j) + \bar{N}(i, j), \quad (i, j) \in \Omega \in \mathbf{Z}^2$

IPOTESI: p.s. rumore **BIANCO** (stazionario, a media nulla, non auto-correlato)

$$\begin{aligned} r_{\bar{n}}(l, m) &:= \frac{1}{d^2} (\bar{n} \star \bar{n})_{l, m} = (\bar{n} \ast \bar{n}')_{l, m} \\ &= \frac{1}{d^2} \sum_{(i, j) \in \Omega} \bar{n}(i, j) \bar{n}(i + l, j + m), \quad (l, m) \in \Theta \end{aligned}$$

IPOTESI di **ERGODICITA'**:

$$r_{\bar{n}}(l, m) \simeq \rho_{\bar{N}}(l, m) = 0 \quad \forall (l, m) \in \Theta, \quad (l, m) \neq (0, 0)$$



Approccio variazionale classico

Continuo deterministico: $u_0(x, y) = \bar{u}(x, y) + \bar{n}(x, y)$, $(x, y) \in \Omega \in \mathbf{R}^2$

Stima u dell'immagine originale come minimizzazione:

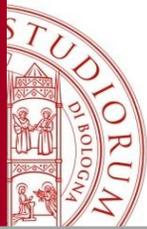
$$\min_{u \in U} \{ J(u) = \mathcal{R}(u) + \mathcal{F}(u_0 - u) \}$$

$$\mathcal{R}(u) = \int_{\Omega} \psi(|\nabla u|^2) d\Omega \quad \mathcal{F}(u_0 - u) = \sum_k \lambda_k \mathcal{F}_k(u_0 - u)$$

Termini di fedeltà ai dati classicamente usati:

$$\mathcal{F}_1(u_0 - u) = \int_{\Omega} (u_0 - u) d\Omega - |\Omega|\mu, \quad \text{with } \mu = 0,$$

$$\mathcal{F}_2(u_0 - u) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} (u_0 - u)^2 d\Omega - |\Omega|\sigma^2 \right), \quad \text{with } \sigma > 0$$



Modello proposto

Continuo deterministico: $u_0(x, y) = \bar{u}(x, y) + \bar{n}(x, y)$, $(x, y) \in \Omega \in \mathbf{R}^2$

Stima u dell'immagine originale come minimizzazione:

$$\min_{u \in U} \{ J(u) = \mathcal{R}(u) + \mathcal{F}(u_0 - u) \}$$

$$\mathcal{R}(u) = \int_{\Omega} \psi(|\nabla u|^2) d\Omega \quad \mathcal{F}(u_0 - u) = \sum_k \lambda_k \mathcal{F}_k(u_0 - u)$$

Termini di fedeltà ai dati proposto (bianchezza residuo):

$$J_w(u) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{R}^2} |\nabla R_n|^2 d\omega_x d\omega_y \quad R \text{ trasformata di Fourier del residuo } r$$

Modello proposto

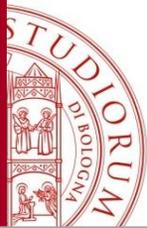
Termini di fedeltà ai dati proposto (bianchezza residuo):

$$J_w(u) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} |\nabla R_n|^2 d\omega_x d\omega_y \quad R \text{ trasformata di Fourier del residuo } r$$



Teorema di Parseval

$$\begin{aligned} J_w(u) &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \left\| \frac{\partial R_n}{\partial \omega_x} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial R_n}{\partial \omega_y} \right\|^2 d\omega_x d\omega_y \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \|-ix r_n\|^2 + \|-iy r_n\|^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} r_n^2 (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$



Modello proposto

Calcolo delle variazioni (passaggi):

$$\begin{aligned}\frac{dJ_w}{dt} &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial r_n}{\partial t} r_n(x^2 + y^2) dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial n}{\partial t} * n' \right) r_n(x^2 + y^2) dx dy \\ &= - \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} * n' \right) r_n(x^2 + y^2) dx dy \\ &= - \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial t}(\hat{x}, \hat{y}) n'(x - \hat{x}, y - \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} \right) r_n(x^2 + y^2) dx dy \\ &= - \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial t}(\hat{x}, \hat{y}) \left(\iint_{\mathbb{R}^2} n'(x - \hat{x}, y - \hat{y}) r_n(x, y) (x^2 + y^2) dx dy \right) d\hat{x} d\hat{y} \\ &= - \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial t}(\hat{x}, \hat{y}) \left(\iint_{\mathbb{R}^2} n(\hat{x} - x, \hat{y} - y) r_n(x, y) (x^2 + y^2) dx dy \right) d\hat{x} d\hat{y} \\ &= - \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u}{\partial t} (n * \tilde{r}_n) d\hat{x} d\hat{y}\end{aligned}$$

Modello proposto

Calcolo delle variazioni (risultato finale):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{r}_n * n = \left((x^2 + y^2) r_n \right) * n$$

Prendiamo in considerazione una generica funzione peso:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\Lambda r_n) * n = (\Lambda (n * n')) * n$$

Flusso discesa gradiente classico:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u|^2) \nabla u) + \sum_{k=0}^K \lambda_k D_{\mathcal{F}_k}(u_0 - u), \quad u^{(0)} = u_0$$

Discretizzazione "basica", schema Eulero in avanti

Parametri di regolarizzazione

$$D_{\mathcal{F}_w}(u_0 - u) = \frac{2}{d^4} \left[\left(\Lambda : (n * n') \right) * n \right]$$

Tre possibilità:

a) $\Lambda_{l,m} = 1$

b) $\Lambda_{l,m} = l^2 + m^2$

c) $\Lambda_{l,m} = c_{u_0}(l, m)$

↘ autocovarianza dell'immagine osservata

matrice quadrata diagonale, ciascun elemento sulla diagonale $\Lambda_i = \Lambda_{l,m}$ pesa l'auto-correlazione del residuo al lag (l, m)

Nell'ipotesi (verosimile) che il rumore non sia correlato con l'immagine originale, si dimostra che:

$$c_{\bar{u}}(l, m) \simeq c_{u_0}(l, m) \quad \forall (l, m) \neq (0, 0)$$



Risultati Sperimentali

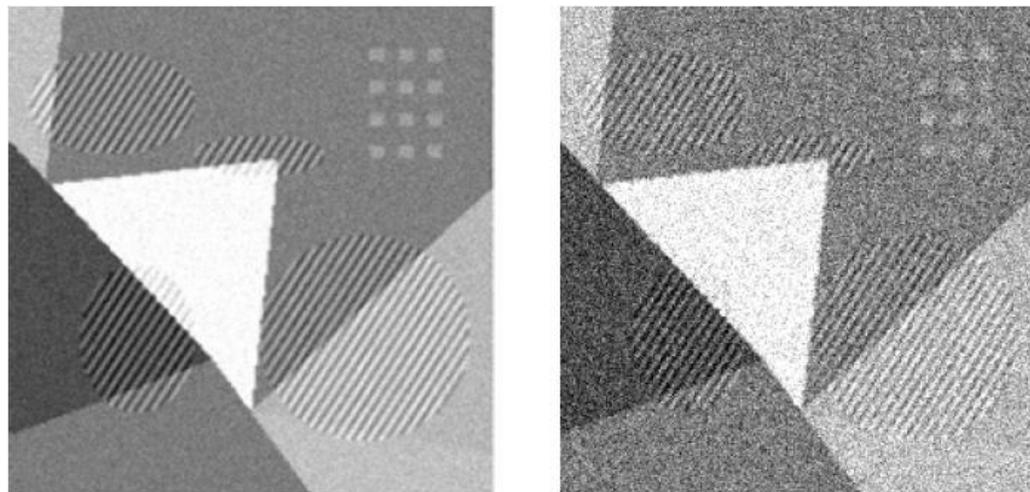
Confrontiamo quantitativamente (RMSE):

- TV
- TV+L2
- TV+ W_a (scelta a) parametri regolarizzazione)
- TV+ W_b (scelta b) parametri regolarizzazione)
- TV+ W_c (scelta c) parametri regolarizzazione)

su una serie di immagini 2D corrotte sinteticamente da rumore additivo a media nulla e bianco con diverse deviazioni standard

Risultati Sperimentali

immagine texture



σ	TV	TV+L ₂	TV+W _a	TV+W _b	TV+W _c
10	6.76 (25)	6.75 (35)	6.34 (35)	6.47 (42)	6.30 (34)
30	12.66 (104)	12.66 (104)	10.22 (187)	11.47 (155)	10.02 (181)
50	16.17 (205)	15.94 (459)	12.73 (351)	14.60 (315)	12.38 (323)

RMSE e numero di iterazioni per diversi livelli di rumore

Risultati Sperimentali

immagine **barbara**



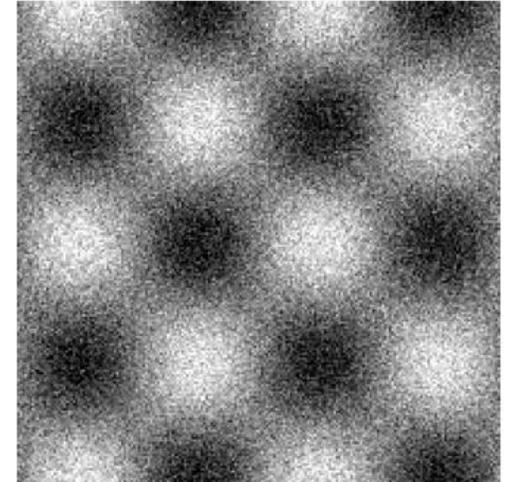
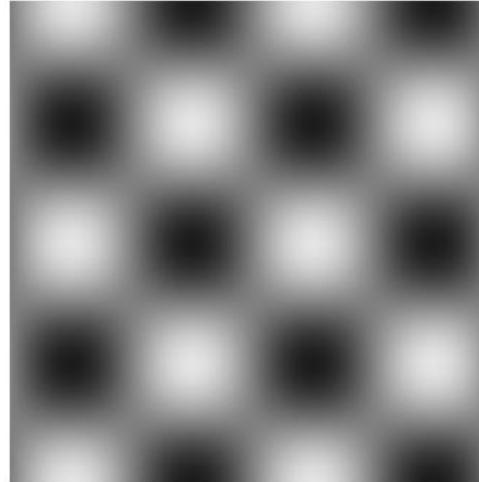
σ	TV	TV+L ₂	TV+W _a	TV+W _b	TV+W _c
10	9.01 (12)	9.00 (40)	8.48 (26)	8.98 (13)	8.28 (26)
30	20.96 (66)	20.73 (292)	18.81 (127)	20.82 (72)	17.89 (119)
50	26.67 (170)	25.99 (547)	24.18 (277)	26.34 (210)	23.11 (239)

RMSE e numero di iterazioni per diversi livelli di rumore

Risultati Sperimentali

immagine onda sinusoidale

$$f(x, y) = 128 + 100 \sin\left(\frac{2\pi x}{100}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{100}\right)$$



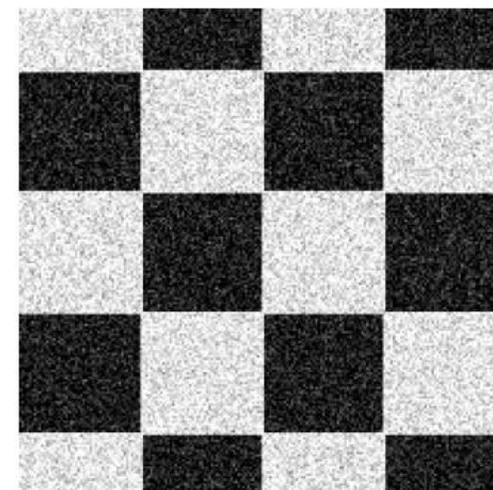
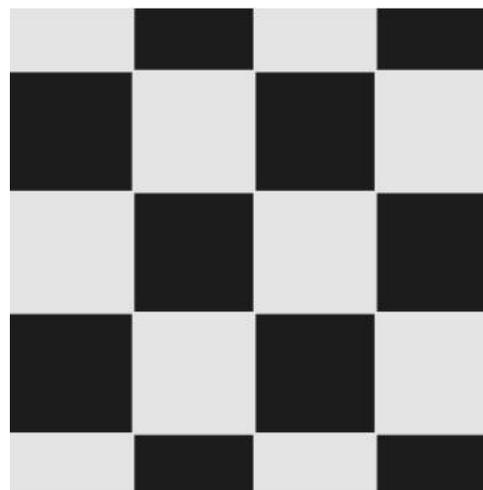
σ	TV	TV+L ₂	TV+W _a	TV+W _b	TV+W _c
10	2.37 (74)	2.37 (74)	2.14 (122)	2.15 (116)	2.03 (240)
30	4.65 (198)	4.65 (198)	4.22 (304)	4.25 (301)	4.08 (317)
50	6.34 (323)	6.34 (323)	5.76 (488)	5.81 (488)	5.54 (491)

RMSE e numero di iterazioni per diversi livelli di rumore

Risultati Sperimentali

immagine onda quadra

$$g(x, y) = \begin{cases} 228 & \text{if } f(x, y) \geq 128 \\ 28 & \text{if } f(x, y) < 128 \end{cases}$$

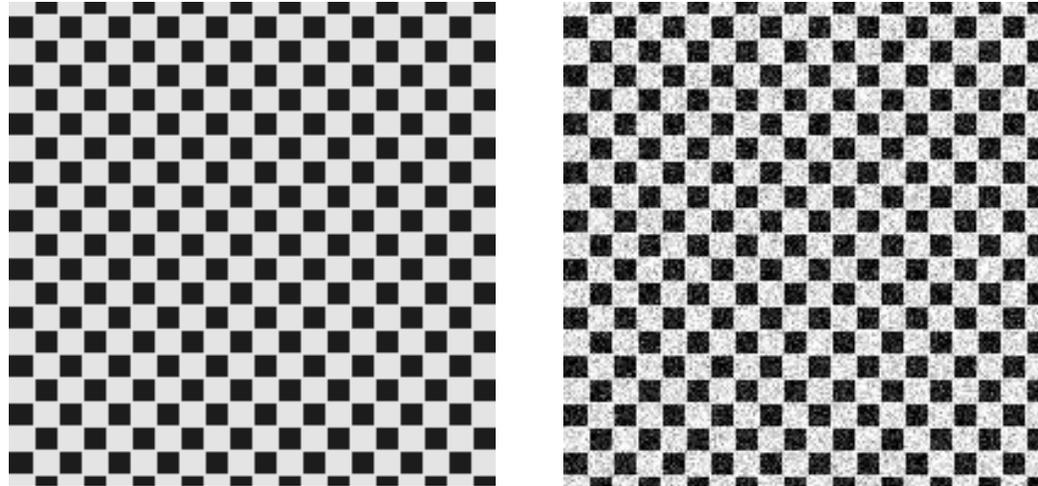


σ	TV	TV+L ₂	TV+W _a	TV+W _b	TV+W _c
10	2.29 (56)	2.17 (116)	1.90 (97)	1.92 (91)	1.72 (108)
30	6.06 (176)	5.57 (442)	5.05 (304)	5.10 (276)	4.53 (332)
50	9.45 (297)	8.64 (840)	7.90 (536)	7.99 (476)	7.07 (566)

RMSE e numero di iterazioni per diversi livelli di rumore

Risultati Sperimentali

immagine checkboard

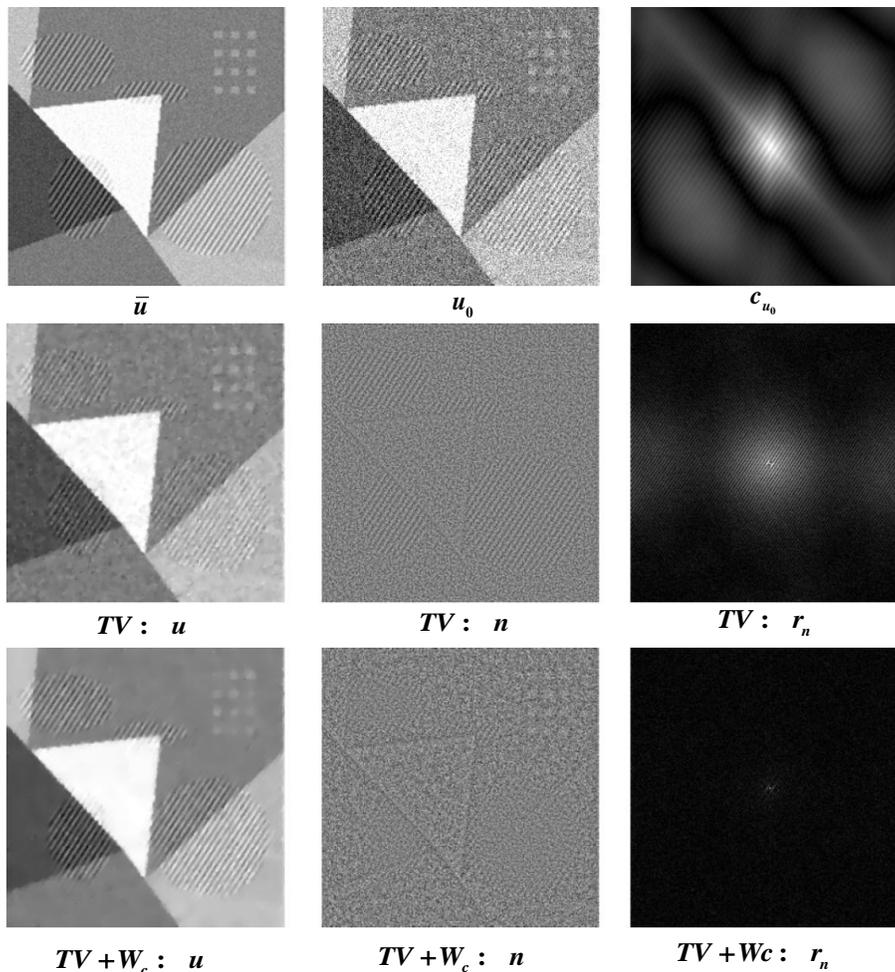


σ	TV	TV+L ₂	TV+W _a	TV+W _b	TV+W _c
10	4.99 (37)	4.84 (103)	2.25 (163)	2.40 (134)	1.98 (177)
30	14.03 (114)	13.61 (373)	6.12 (439)	6.49 (367)	5.33 (472)
50	22.16 (192)	21.67 (383)	9.66 (714)	10.25 (579)	8.45 (757)

RMSE e numero di iterazioni per diversi livelli di rumore

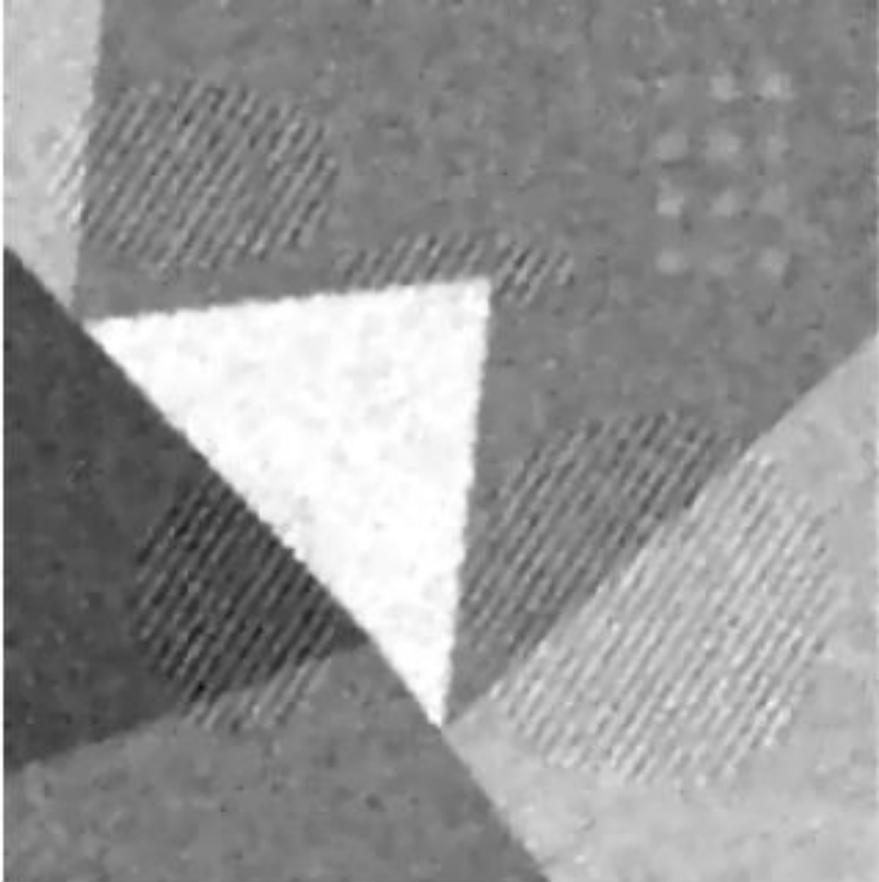
Risultati Sperimentali

immagine texture

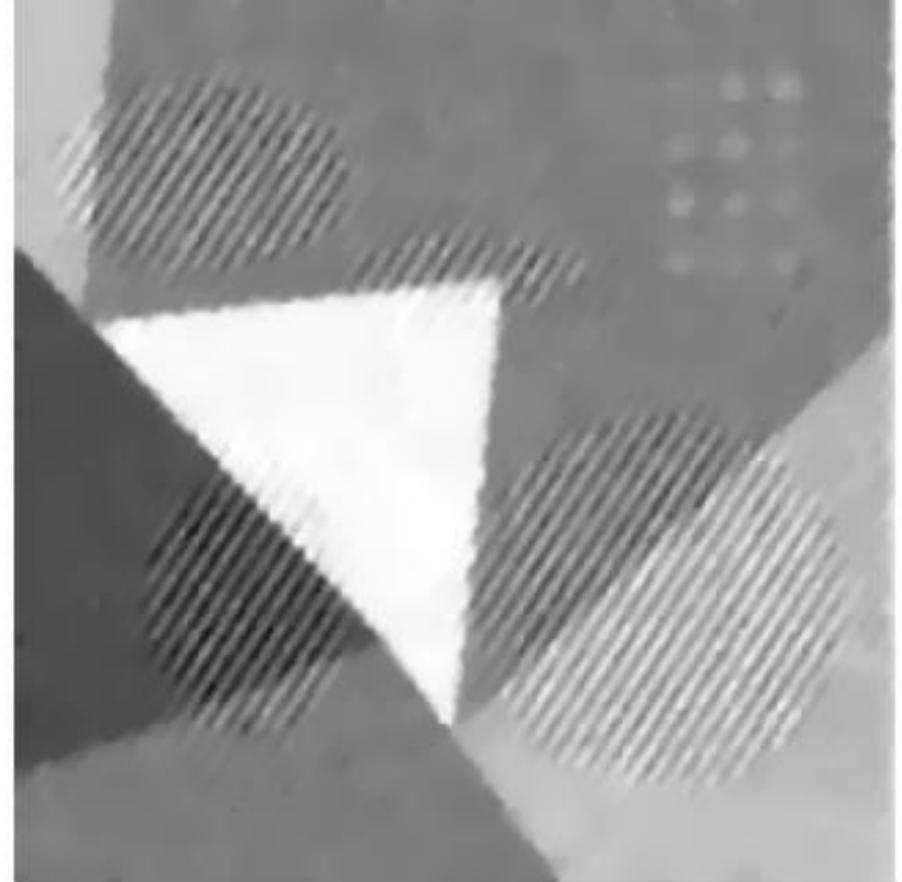


Risultati Sperimentali

immagine texture



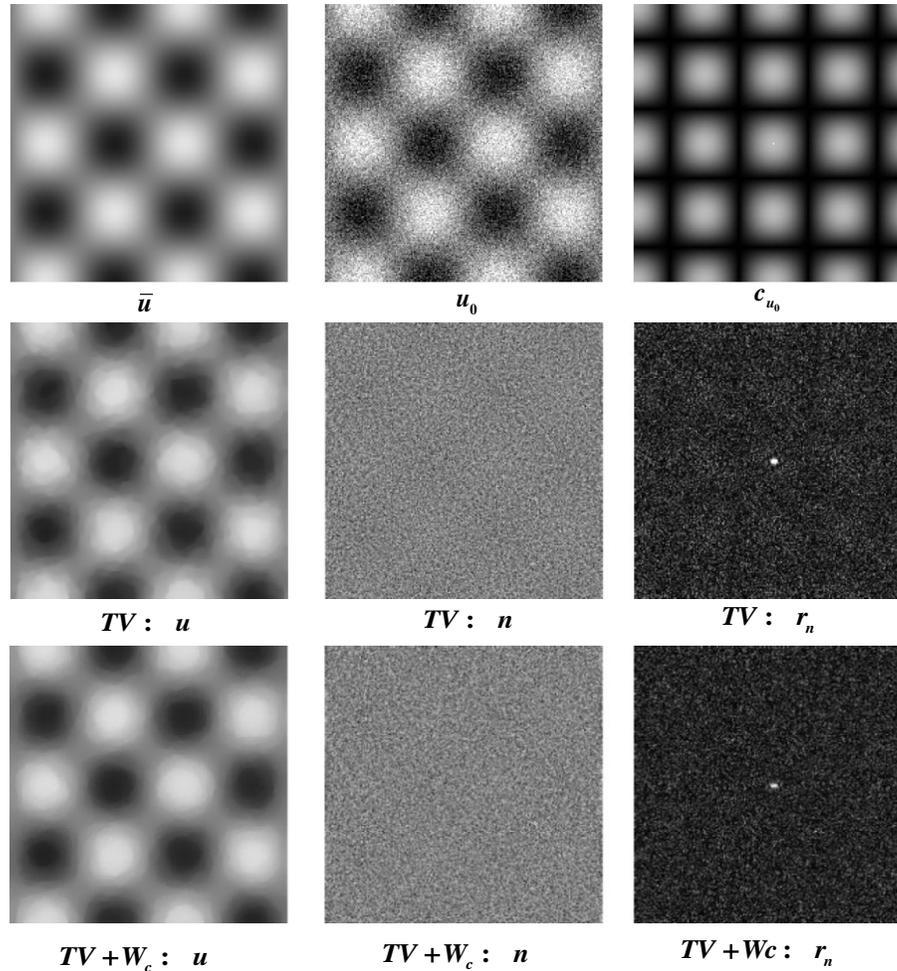
$TV: u$



$TV+W_c: u$

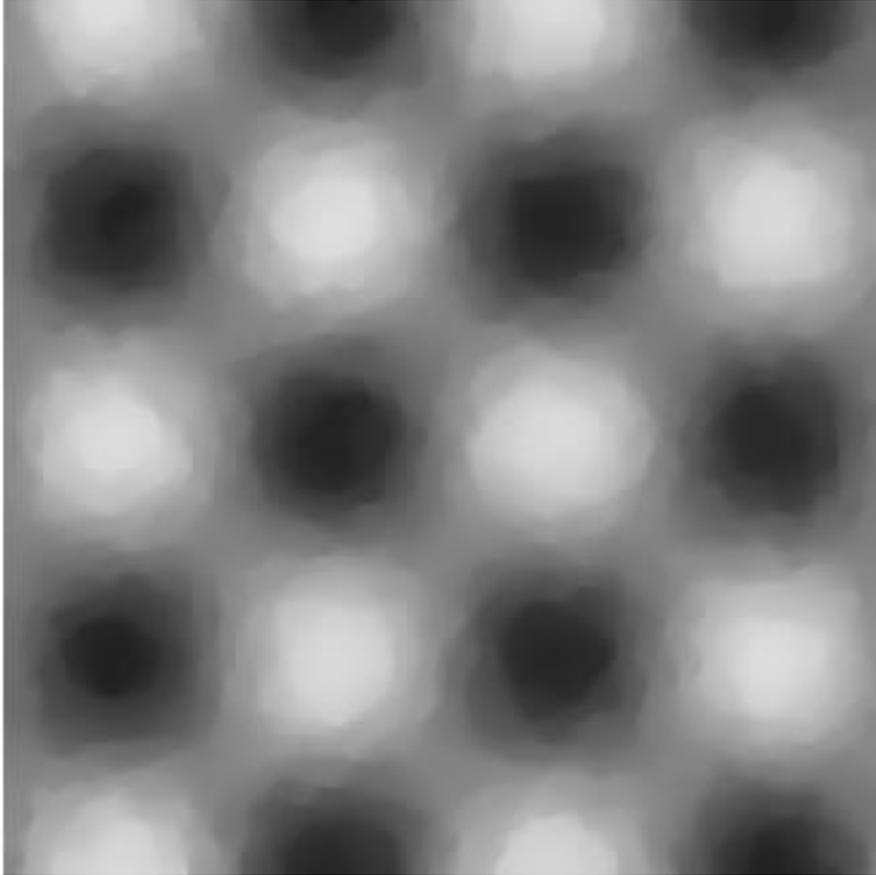
Risultati Sperimentali

immagine onda sinusoidale

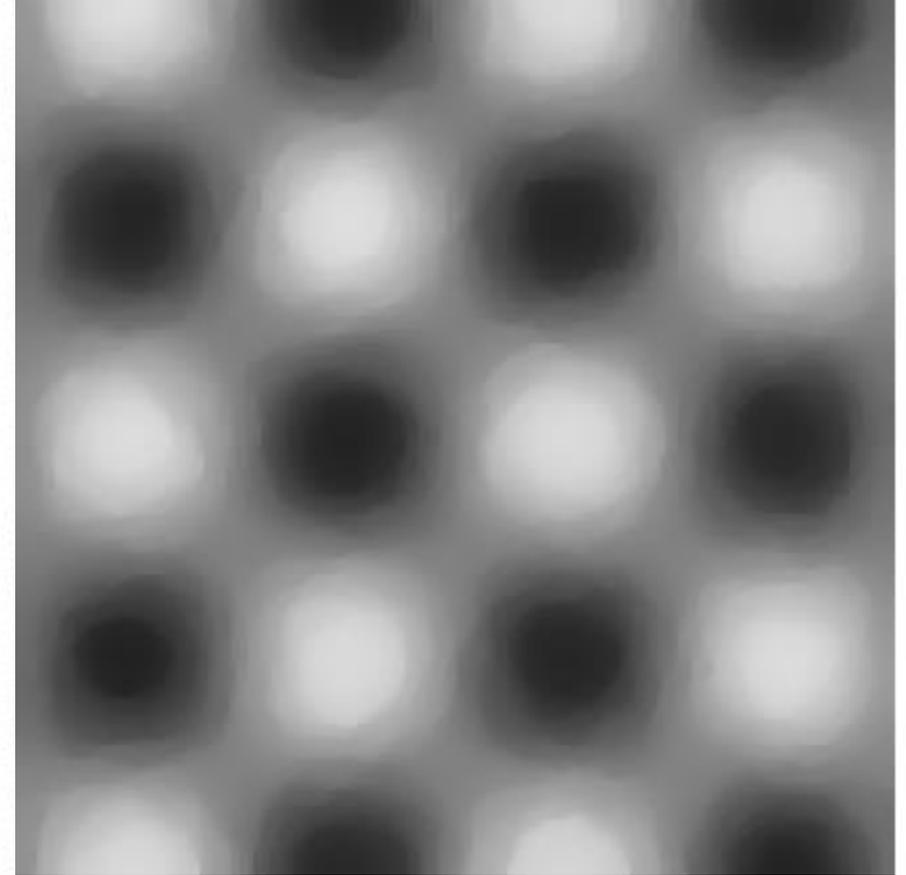


Risultati Sperimentali

immagine onda sinusoidale



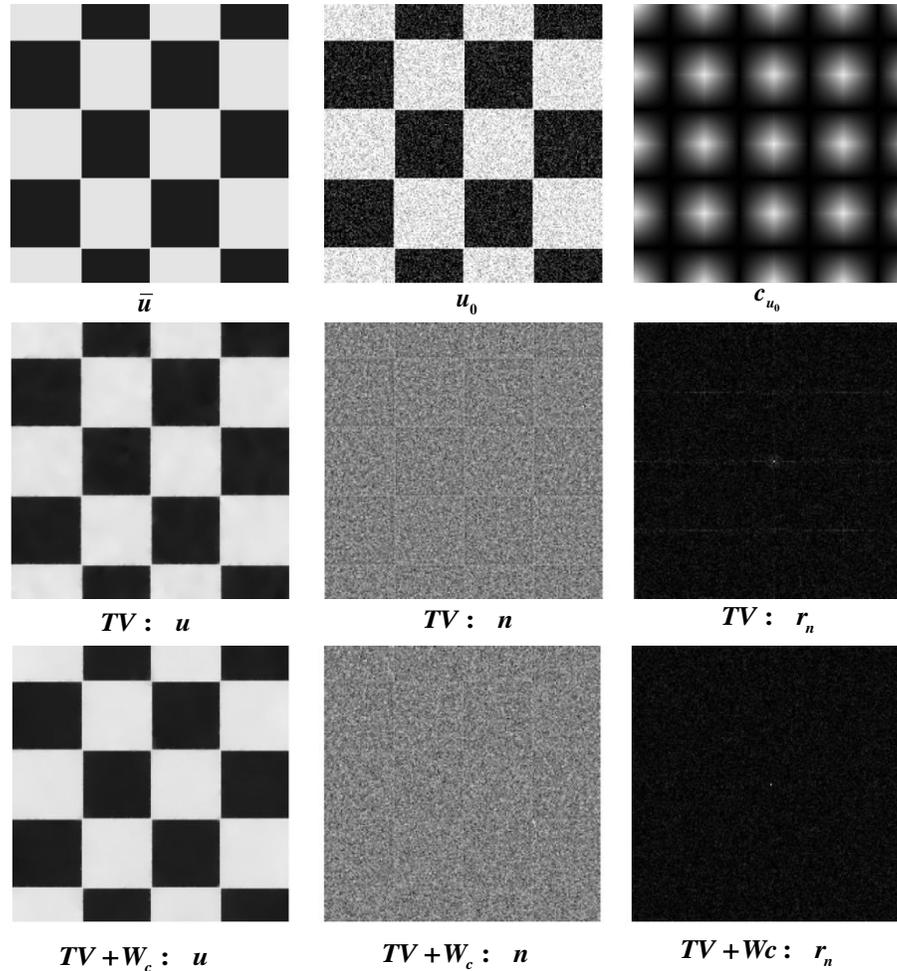
$TV: u$



$TV+W_c: u$

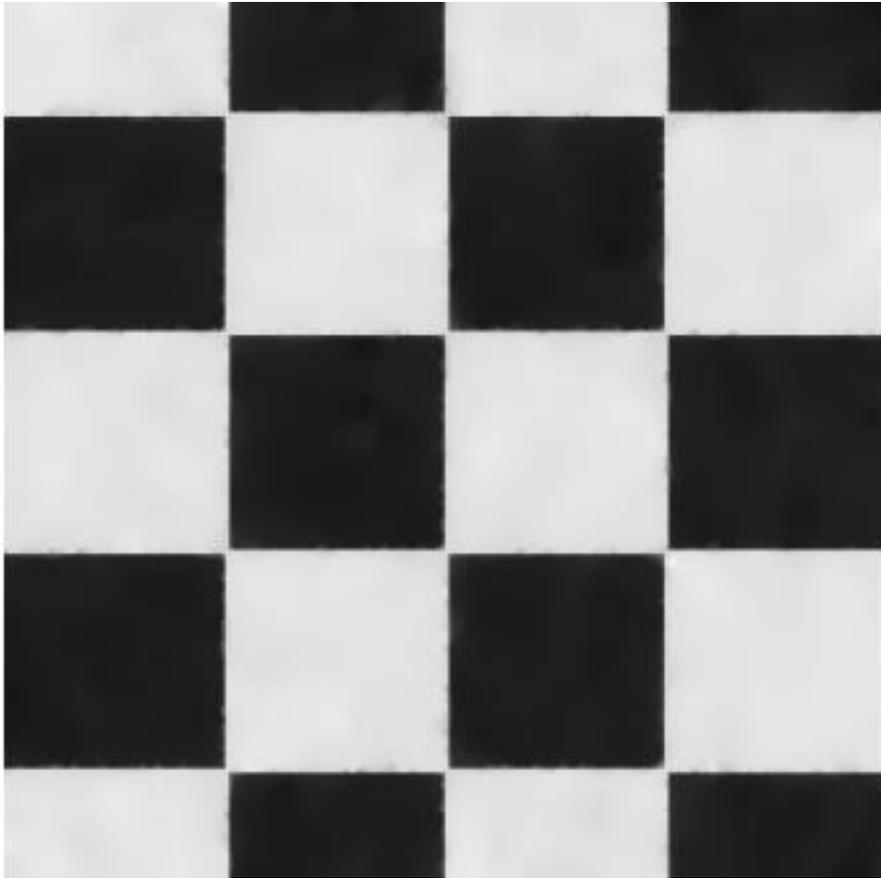
Risultati Sperimentali

immagine onda quadra

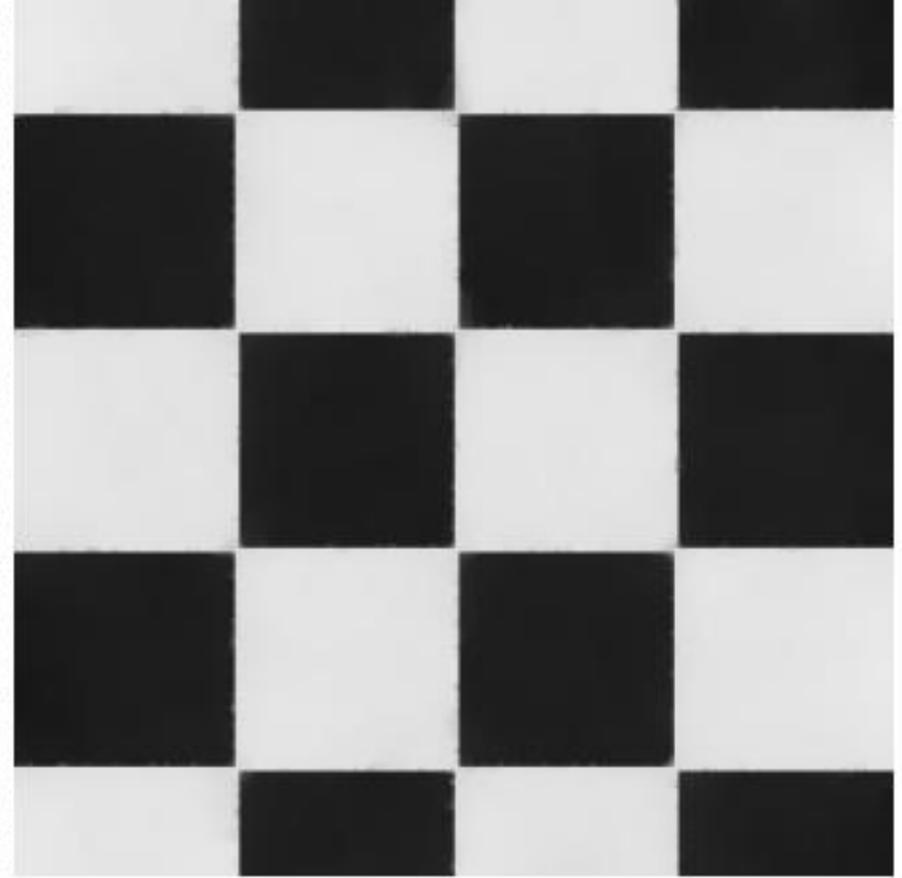


Risultati Sperimentali

immagine onda sinusoidale



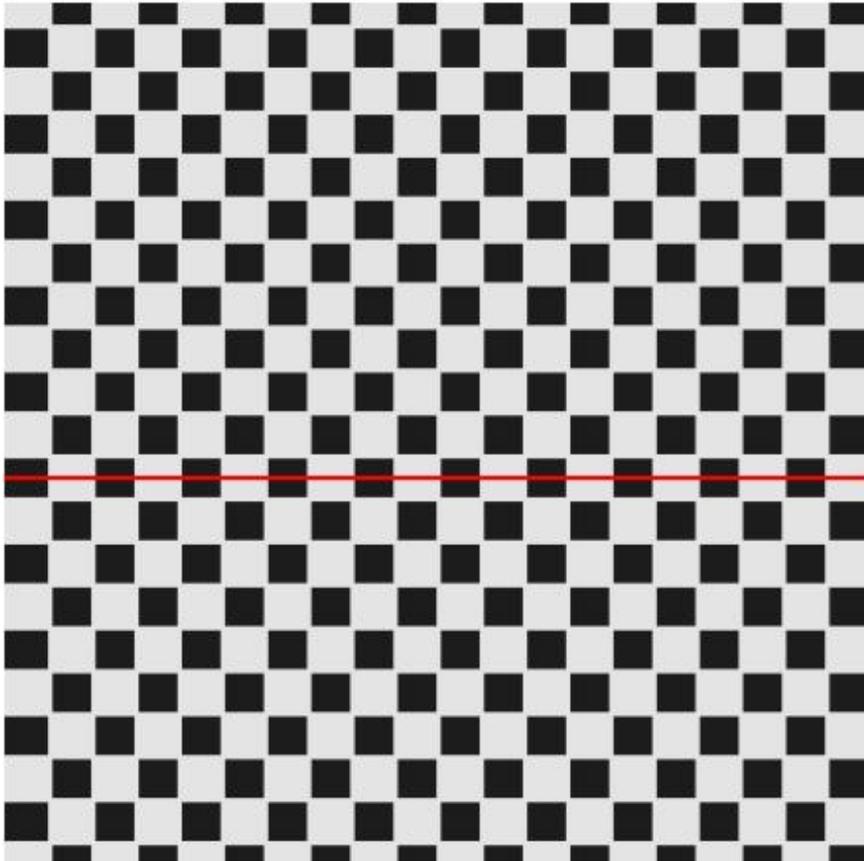
$TV: u$



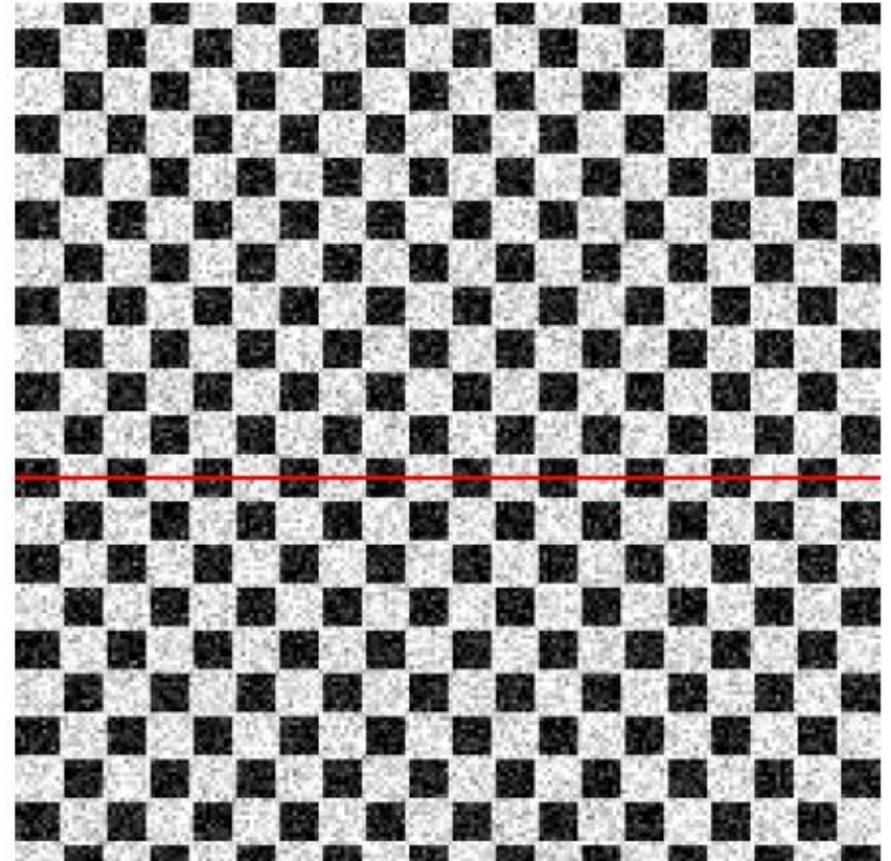
$TV+W_c: u$

Risultati Sperimentali

immagine checkboard



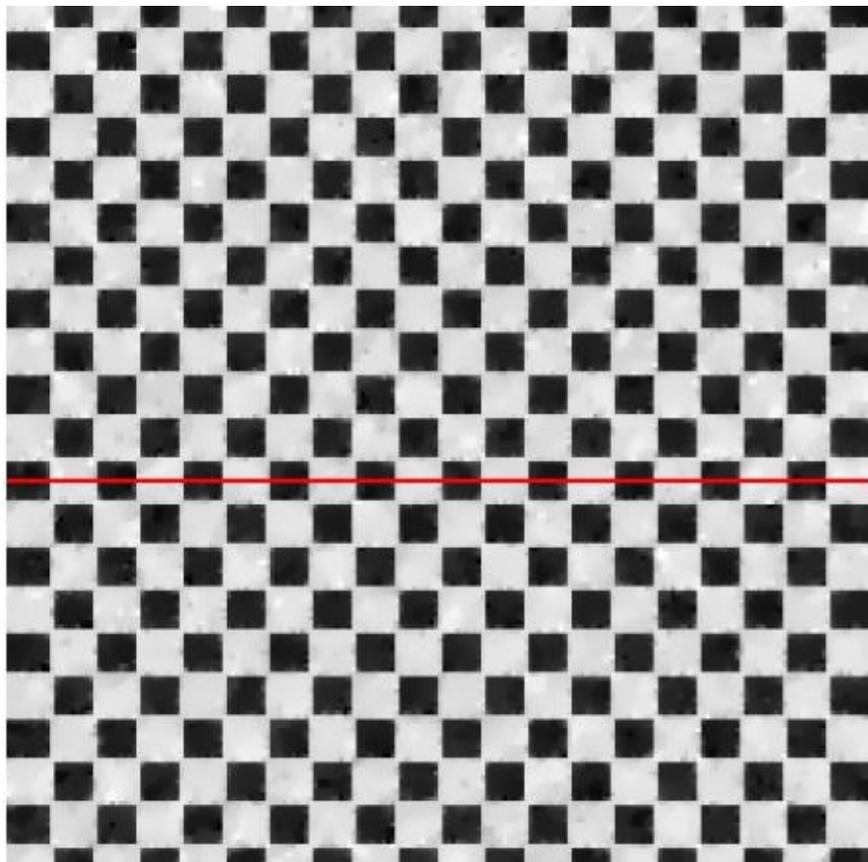
\bar{u}



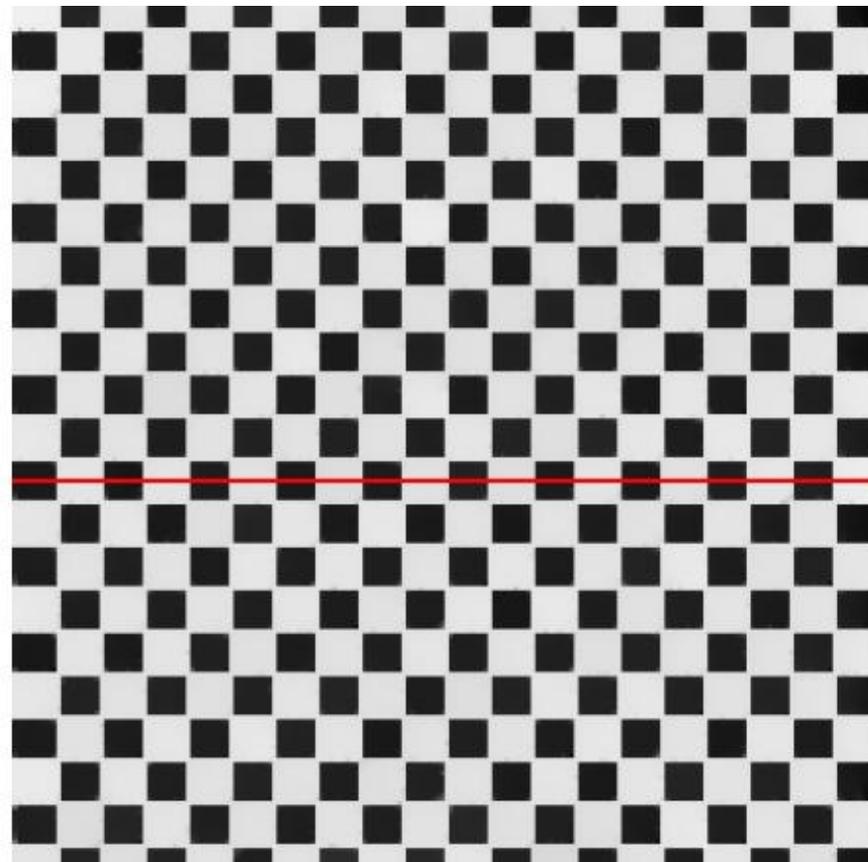
u_0

Risultati Sperimentali

immagine **checkboard**



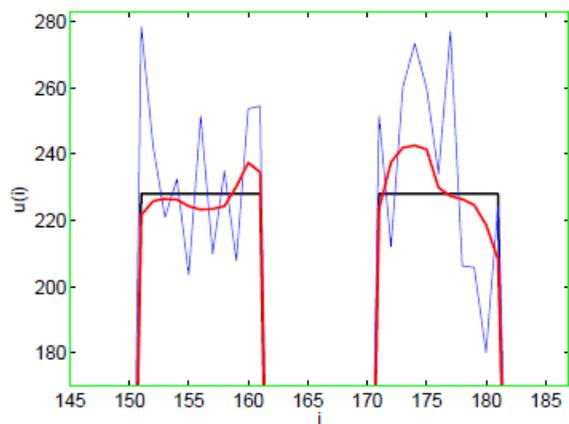
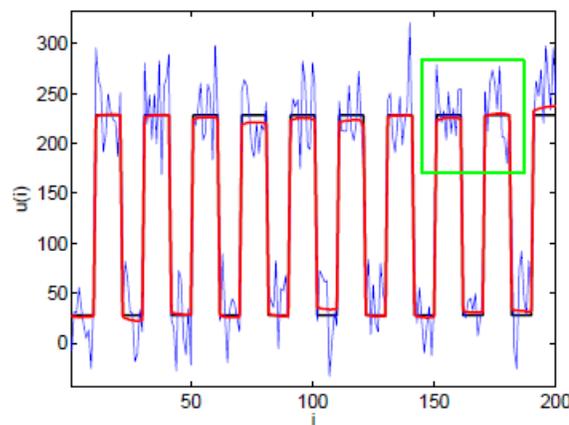
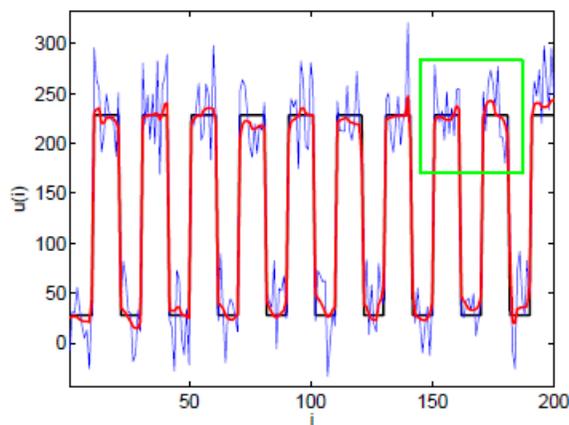
$TV: u$



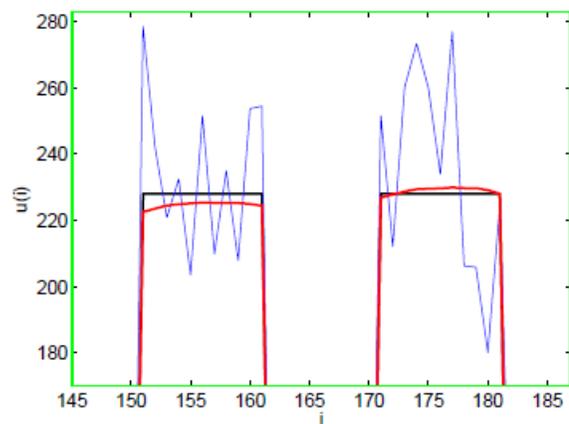
$TV+W_c: u$

Risultati Sperimentali

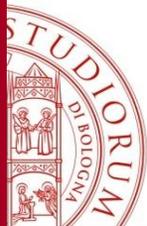
immagine checkboard



$TV : u$

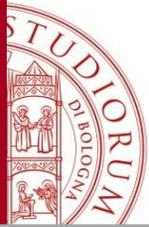


$TV + W_c : u$



Conclusioni e Sviluppi Futuri

- Abbiamo presentato due modalità con cui la proprietà di bianchezza del rumore in immagini può essere esplicitamente e proficuamente sfruttata:
 - Rilevazione del grado di tessitura in immagini, allo scopo specifico di selezionare in maniera spazialmente adattiva il termine di regolarizzazione usato nella restoration variazionale di immagini degradate da rumore e sfocamento
 - Rimozione del rumore in immagini corrotte da rumore additivo con la sola ipotesi che questo sia a media nulla e bianco, tramite un modello variazionale con termine di fedeltà ai dati che penalizza i valori della funzione di autocorrelazione dell'immagine residuo
- In relazione alla seconda delle due modalità, si prevede lo studio di metodi numerici più accurati ed efficienti per la minimizzazione del funzionale o comunque per la discretizzazione del flusso gradiente, oltrechè l'estensione dell'idea (nuovo termine di fedeltà) al caso di immagini che siano anche sfocate con operatore di sfocamento noto / non noto



Conclusioni e Sviluppi Futuri

Grazie per l'attenzione!