

Flusso gradiente per alcuni perimetri non locali e approssimazione tramite movimenti minimizzanti

Marcello Ponsiglione
Dipartimento di Matematica *Guido Castelnuovo*
Sapienza Università di Roma.

- Un perimetro non locale in segmentazione di immagini
- Definizione di una classe naturale di perimetri non locali $J(E)$
- La corrispondente curvatura $\kappa(x, E)$ e flusso geometrico $V(x, \partial E) = -\kappa(x, E)$
- Approccio level set e movimenti minimizzanti
- **Teorema: Movimenti minimizzanti \mapsto Soluzioni level set**
- Esempi: Perimetri frazionari e il pre-contenuto di Minkowski

Risultati collegati per perimetri locali : [Chambolle \(04\)](#),
[Caselles-Chambolle \(07\)](#), [Bellettini-Caselles-Chambolle-Novaga \(06\)](#),
[Chambolle-Novaga \(06/08\) for convex crystals](#), [T. Eto-Y. Giga-K Ishii \(12\) for non isotropic flow of unbounded sets](#). [Ciomaga-Thouroude \(in preparation\)](#)

Modelli variazionali in segmentazione di immagini

L'obiettivo è di costruire modelli variazionali (e algoritmi) per il **trattamento di immagini**. Il problema modello consiste nel rimuovere rumore e piccole imperfezioni da una data immagine.

Impronta digitale



Immagine trattata



Competizione tra termini di...

Volume



Superficie



$$E = F(\text{Vol}) + G(\text{Sup}) \mapsto \min!$$

Il Funzionale di Mumford Shah

Modello variazionale basato sulla competizione tra l'area degli oggetti della figura, e il loro perimetro.

Mumford, D. Shah, J.: Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.* **42** (1989), no. 5, 577–685.

Data una immagine originale u_o , l'immagine "ripulita" u si ottiene minimizzando

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |u - u_o|^2 dx + \mathcal{H}^1(\Gamma).$$

- **Variabili:** una curva Γ , ed una funzione u , regolare in $\Omega \setminus \Gamma$;
- $|u - u_o|^2$: Termine di fedeltà';
- $\mathcal{H}^1(\Gamma)$: Penalizza oggetti piccoli (= rumore);
- $|\nabla u|^2$: Penalizza oscillazioni (= rumore).

Spazio funzionale naturale: $SBV(\Omega)$.

La variante di Chan Vese

Assumiamo $u = \chi_E$, $|\nabla u| = 0$, e minimizzano il funzionale tra le funzioni caratteristiche.

$$F(E) = \lambda \int_{\Omega} |\chi_E - u_o|^2 dx + \mathcal{H}^1(\partial E).$$

T. Chan and L. Vese: *Active Contours without Edges*, *IEEE Transactions on Image Processing* **16** (2000), no. 2, 266-277.

Esistenza del minimo: metodo diretto del calcolo delle variazioni.

Sia E_n una successione minimizzante. $\mathcal{H}^1(\partial E_n) \leq C \mapsto E_n \rightarrow E$.

Semicontinuita' $\mapsto F(E) \leq \liminf F(E_n) = \inf F$.

Domanda: si puo' segmentare un insieme molto frastagliato senza prendere λ enorme?

Domanda: si puo' segmentare un frattale? (Fuori da *SBV!*)

Segmentare oggetti molto frastagliati

L'idea e' di sostituire il termine di penalizzazione dei perimetri $\mathcal{H}^1(\partial E)$ con $\mathcal{H}^2(\rho\text{-}\partial E) = \text{Area}(\cup_{x \in \partial E} B_\rho(x))$. 1) Penalizza in modo **additivo** il rumore. 2) Agisce come una misura **sub-additiva** su ∂E .

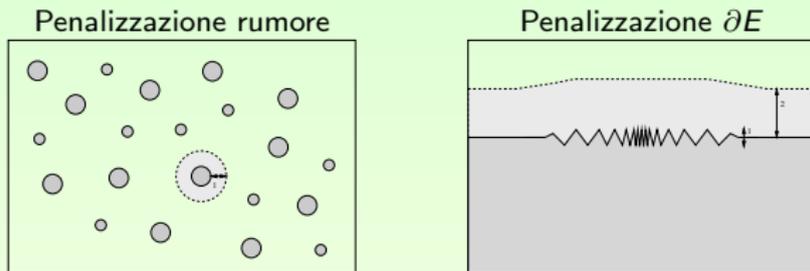


Figura: $\rho\text{-}\partial E$ "rilassa" la penalizzazione di bordi frastagliati.

Barchiesi M., Kang S. H., Triet M. L., Morini M., P. M.: A variational model for infinite perimeter segmentations based on Lipschitz level set functions: denoising while keeping finely oscillatory boundaries. *Multiscale Model. Simul.* **8** (2010)

Il termine $\mathcal{H}^2(\rho - \Gamma)$ può essere approssimato da

$$\mathcal{H}^2(\rho - \Gamma) = \int_{\Omega} f \left(\frac{\text{dist}(x, \Gamma)}{\rho} \right) dx,$$

dove “dist” e' la distanza con segno e $f \approx \chi_{[-1,1]}$.

Formulazione level set: $\{E = \phi \geq 0\}$, $\Gamma = \{\phi = 0\}$.

Lavoriamo con $\phi(x) = \text{dist}(x, \{\phi = 0\})$, aggiungendo la penalizzazione $\int_{\Omega} |\nabla \phi|^p dx$. Per $p \rightarrow \infty$, si ha $|\nabla \phi| \leq 1!$

In conclusione, minimizziamo (gradient flow) il seguente funzionale

$$F(\phi) = \int_{\Omega} f \left(\frac{\phi}{\rho} \right) + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^p dx + \lambda \left[\int_{\Omega} |u_0 - c_1(H(\phi))|^2 H(\phi) dx + \int_{\Omega} |u_0 - c_2(H(\phi))|^2 (1 - H(\phi)) dx \right].$$

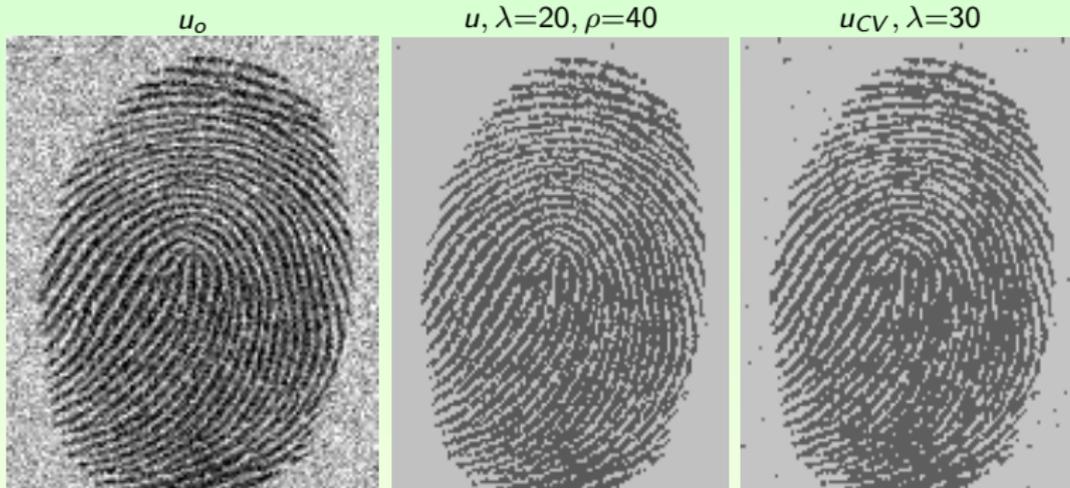


Figura: Il nostro risultato comparato con Chan-Vese

Esperimenti numerici

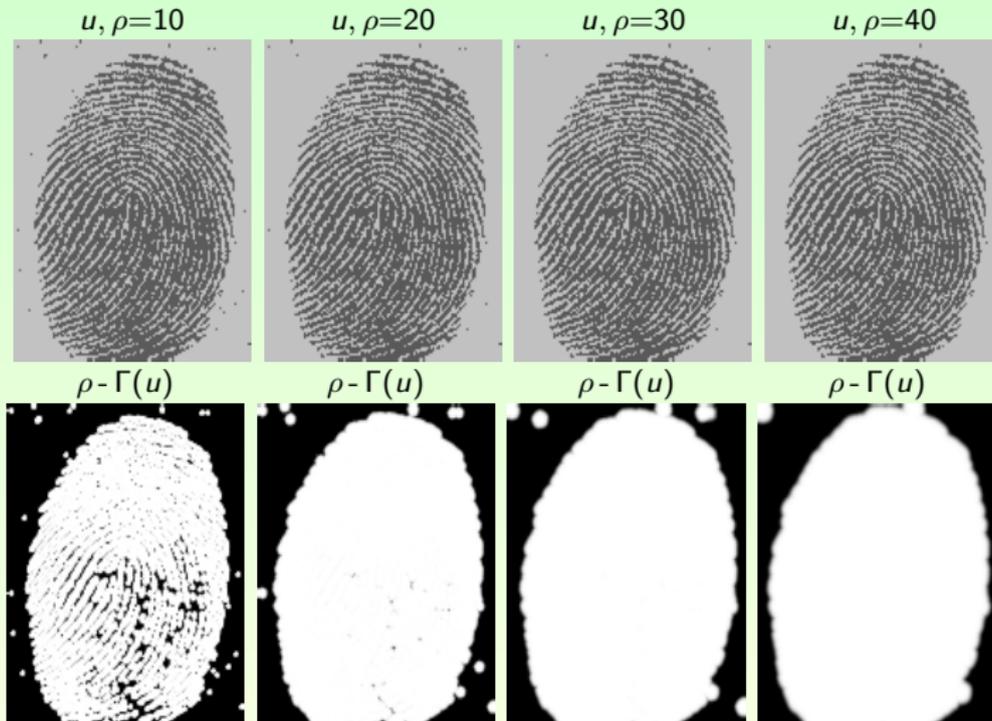
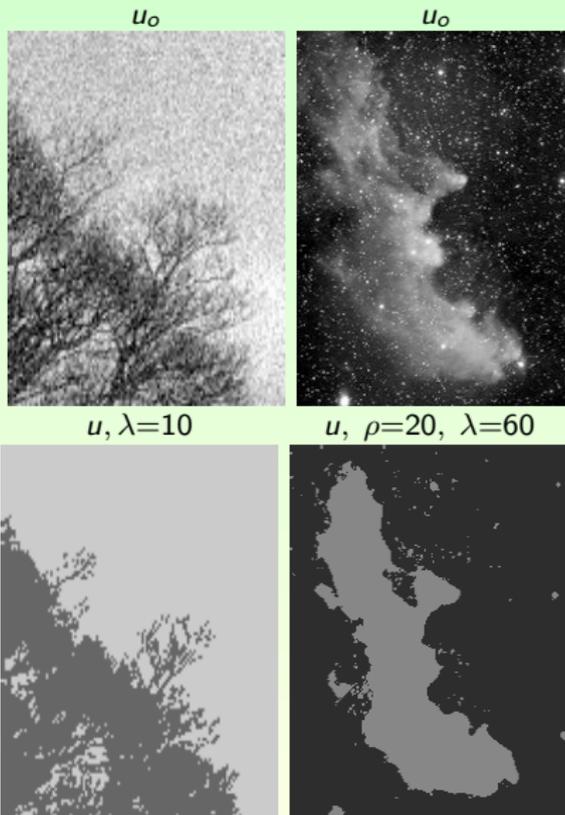


Figura: L' impronta digitale segmentata col modello proposto, con $\lambda = 20$, $\rho = 10, 20, 30, 40$.

Esperimenti numerici



Minimizzazione della variazione totale non locale

A. Chambolle con metodi graph-cuts sviluppati con Darbon



Resolution of "ROF" with the functional based on oscillation: large details are smoothed out as with the total variation while small oscillations are kept. [The method is based on graph-cuts]

Variazione totale standard

Standard total variation



The same with the standard Total Variation

Flusso geometrico corrispondente al “perimetro non locale”

$$\mathcal{H}^2(\rho\text{-}\partial E) = \cup_{x \in \partial E} B_\rho(x).$$

Chambolle A., Morini M., M.P.: A non-local mean curvature flow and its semi-implicit time-discrete approximation. *SIAM J. Math. Anal.*, bf 44 (2012).

Flusso geometrico per una classe generale di perimetri non locali

Chambolle A., Morini M., M.P. Work in progress...

Flusso Geometrico del perimetro

Il moto per curvatura media di un insieme: $t \mapsto E_t \subset \mathbb{R}^n$

$$V(x, t) = -\kappa(x, t), \quad \text{per ogni } x \in \partial E_t$$

$V(x, t)$ è la velocità normale a ∂E_t nel punto x

$\kappa(x, t)$ è la curvatura media: " $\kappa = \nabla \text{Perimetro}$ "

Metodo Level set: $E_t = \{u(\cdot, t) \geq 0\}$

$$u_t = -|\nabla u(x, t)|\kappa(x, t) = -|\nabla u(x, t)|\operatorname{div} \frac{-\nabla u(x, t)}{|\nabla u(x, t)|}$$

Osher, S., Sethian, J. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. J. Comp. Phys. 79, (1988).

Evans, L. C., and Spruck, J. Motion of level sets by mean curvature, I. J. Diff. Geom. 33, 635-681 (1991).

Chen, Y.-G., Giga, Y., and Goto, S. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. J. Diff. Geom. 33, (1991).

Flusso Geometrico del perimetro: approccio variazionale

Movimenti minimizzanti: Movimento minimizzante: $E_{n-1} \mapsto E_n$

$$\min \left(\text{Per}(E_n) + \frac{1}{\Delta t} \int_{E_n \Delta E_{n-1}} d(x, \partial E_{n-1}) dx \right)$$

L. Ambrosio, Minimizing movements, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5), 19 (1995).

Sia $E_{\Delta t}(t)$ costante a tratti. Allora $E_{\Delta t} \rightarrow E(t)$, soluzione di

$$V(t, p) = -\kappa(t, p), \quad \text{per ogni } p \in \partial E(t)$$

F. Almgren, J. E. Taylor, and L.-H. Wang. Curvature-driven flows: a variational approach. SIAM J. Control Optim., 31 (2), 1993.

S. Luckhaus and T. Sturzenhecker. Implicit time discretization for the mean curvature flow equation. Calc. Var. Partial Differential Equations, 3 (2), 1995.

Chambolle, A.: An algorithm for mean curvature motion. *Interfaces Free Bound.* 6 (2004), 195-218.

Una definizione di perimetri non locali

Diremo che un funzionale $J : E \mapsto [0, +\infty]$ e' un **perimetro generalizzato** se:

- i) $J(E) < +\infty$ per ogni $E \in C^2$ con bordo compatto;
- ii) $J(\emptyset) = J(\mathbb{R}^N) = 0$;
- iii) $J(E) = J(E')$ se $|E \Delta E'| = 0$;
- iv) J e' semicontinuo in L^1_{loc} ;
- v) J e' submodulare: per ogni E, F ,

$$J(E \cup F) + J(E \cap F) \leq J(E) + J(F);$$

- vi) J e' invariante per traslazioni.

Estendiamo J a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ imponendo la **formula di co-area**:

$$J(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} J(\{u > s\}) ds.$$

- v) significa che J e' convesso (Chambolle, Giacomini, Lussardi, 2010).

Definizione

Sia $E \in C^2$ con bordo compatto, e sia $x \in \partial E$. Poniamo

$$\kappa^+(x, E) := \inf_{W_n \rightarrow \{x\}} \liminf \frac{J(E \cup W_n) - J(E)}{|W_n \setminus E|}$$

e

$$\kappa^-(x, E) := \sup_{W_n \rightarrow \{x\}} \limsup \frac{J(E) - J(E \setminus W_n)}{|W_n \cap E|}.$$

Diciamo che $\kappa(x, E) \in [-\infty, \infty]$ e' la curvatura di E in x (corrispondente al perimetro J) se

$$\kappa^+(x, E) = \kappa^-(x, E) =: \kappa(x, E).$$

Ipotesi sulla curvatura κ

Assumiamo che J ammetta una curvatura $\kappa(x, E)$ in ogni x di ∂E per ogni $E \in C^2$ con bordo compatto.

- A) Continuità': se $E_n \rightarrow E$ in C^2 e $x_n \in E_n \rightarrow x \in E$, allora $\kappa(x_n, E_n) \rightarrow \kappa(x, E)$.
- B) Curvatura delle sfere: sia

$$c(\rho) := \min_{x \in \partial B_\rho} \kappa(x, B_\rho),$$

Assumiamo che esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che

$$c(\rho) \geq -K > -\infty.$$

L'ipotesi B) garantisce che la curvatura di un compatto rimane limitata per ogni tempo. Senza questa ipotesi abbiamo comunque soluzioni locali. (fino a un tempo $T^* < +\infty$ dipendente da $c(\rho)$).

Monotonia (“comparison”)

Lemma

Siano $E, F \in \mathcal{C}^2$ con $E \subset F$, e $x \in \partial F \cap \partial E$: allora $\kappa(x, F) \leq \kappa(x, E)$.

Dimostrazione.

Grazie all'ipotesi di continuita' di κ possiamo assumere che $\{x\} = \partial E \cap \partial F$. Sia

$$E^\varepsilon = E + \varepsilon\nu, \quad W^\varepsilon = E^\varepsilon \setminus \mathring{F}.$$

Allora $W^\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{K}} \{x\}$ per $\varepsilon \rightarrow 0$. Usando la submodularita' di E^ε e F e l'invarianza per traslazioni, abbiamo

$$J(F \cup W^\varepsilon) - J(F) \leq J(E^\varepsilon) - J((E^\varepsilon) \setminus W^\varepsilon) = J(E) - J(E \setminus (W^\varepsilon - \varepsilon\nu)).$$

Allora dalla definizione di κ deduciamo $\kappa(x, F) \leq \kappa(x, E)$. □

Per ogni $F \in \mathfrak{M}$ e $(p, X) \in J_F^{2,+}(x)$, poniamo

$$\kappa_*(x, p, X, F) = \sup \left\{ \kappa(x, E) : E \in C^2, E \supseteq F, (p, X) \in J_E^{2,-}(x) \right\}$$

Analogamente, per ogni $(p, X) \in J_F^{2,-}(x)$ poniamo

$$\kappa^*(x, p, X, F) = \inf \left\{ \kappa(x, E) : E \in C^2, \dot{E} \subseteq \dot{F}, (p, X) \in J_E^{2,+}(x) \right\}.$$

Alcune proprietà:

- Queste quantità coincidono con la curvatura κ per insiemi C^2 .
- κ_* è semicontinua inferiormente per $\overline{F}_n \rightarrow \overline{F}$ Hausdorff, e con $(p_n, X_n) \in J^{2,+}(x)$ “uniformi”.

Definizione

Una funzione semicontinua superiormente $u : \mathbb{R}^N \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ e' una sottosoluzione viscosa se per ogni $z := (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T)$ e ogni $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^N \times (0, T))$ tale che $u - \varphi$ ha un massimo in z e φ e' ammissibile in z (nel senso di Ishi Souganidis), abbiamo

$$\varphi_t(z) + |D\varphi(z)| \kappa_* (x, D\varphi(z), D^2\varphi(z), \{\varphi(\cdot, t) \geq \varphi(z)\}) \leq 0$$

se $D\varphi(z) \neq 0$, mentre $\varphi_t(z) \leq 0$ se $D\varphi(z) = 0$

Una funzione u e' soluzione viscosa se il suo sviluppo s.c.s e' una sottosoluzione e il suo sviluppo s.c.i e' una soprasoluzione.

Alcune osservazioni sull'Hamiltoniana

L'Hamiltoniana $|p|\kappa_*(x, p, X, F)$ e' non locale:

Slepcev D.: Approximation schemes for propagation of fronts with nonlocal velocities and Neumann boundary conditions. *Nonlinear Anal.* **52** 79-115, 2003.

E' degenerare per $p \rightarrow 0$ ($\kappa_* \approx \kappa_{Eucl}^m$).

H. Ishii and P. Souganidis. Generalized motion of noncompact hypersurfaces with velocity having arbitrary growth on the curvature tensor. *Tohoku Math. J.* **47** (2), 227-250, 1995.

Notiamo che l'Hamiltoniana e' definita solo su oggetti dal chiaro significato geometrico: Approccio reminescente di...

Cardaliaguet-Ley (2008) Cardaliaguet (2000,2001), Cardaliaguet-Rouy (2006).

Movimenti minimizzanti

Fissiamo un passo temporale $h > 0$. Sia $T_h E$ la soluzione minimale di

$$\min_{F \subset \mathbb{R}^d} \left\{ J(F) + \frac{1}{h} \int_{F \Delta E} d(x, \partial E) dx \right\}$$

Questa soluzione minimale esiste: l'ipotesi di submodularità implica che J esteso per coarea a L^1 è convesso! Inoltre esistono soluzioni minimali e massimali: se E, E' sono soluzioni, allora $E \cap E'$ and $E \cup E'$ sono anche soluzioni. Inoltre,

Lemma

Se $E \subseteq E'$, then $T_h E \subseteq T_h E'$.

Definizione di u_h e il suo limite $u_h \rightarrow u$

Data $u \in BUC_c(\mathbb{R}^d)$. Per $s > s'$ abbiamo

$T_h\{u \geq s\} \subseteq T_h\{u \geq s'\}$. Quindi, e' ben definita

$$T_h u(x) := \sup\{s : x \in T_h\{u \geq s\}\}.$$

Data $u_0 \in BUC_c(\mathbb{R}^d)$ costante fuori da un compatto, poniamo

$u_h(x, t) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_h(x, t) := (T_h)^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} u_0$$

Nota: u_h sono equi continue $u_h \rightarrow u$!

In spazio: conseguenza della monotonia e invarianza per traslazioni

In tempo: conseguenza della velocita' finita delle sfere

Teorema

Il limite u e' una soluzione viscosa del moto per curvatura non locale κ .

Idea della dimostrazione

Sia x punto di massimo di $u - \varphi$, e poniamo $E := \{\varphi(\cdot) \geq u(x, t)\}$. Usando la submodularita', trasferiamo le proprieta' di minimalita' da $u_k \rightarrow u$ a opportuni sopralivelli $E_k \rightarrow E$ di φ Ottenendo qualcosa tipo....

$$J(E_k \cup W_\varepsilon) - J(E_k) + \frac{1}{h_k} \int_{W_\varepsilon} d_{E_{k-1}} \leq 0$$

Dividiamo per $|W_\varepsilon| \rightarrow 0$. Allora

$$\frac{J(E_k \cup W_\varepsilon) - J(E_k)}{|W_\varepsilon|} \geq \kappa_*(x, E_k) + l.o.t. \frac{1}{|W_\varepsilon| h_k} \int_{W_\varepsilon} d_{E_{k-1}} \rightarrow \frac{\varphi_t(x, t)}{|D\varphi(x, t)|}$$

Concludiamo dalla semicontinuita' di κ_* .

- Monotonia: OK
- Se κ è semicontinua rispetto a $E_n \rightarrow E$ Hausdorff, o se κ non dipende dalle derivate seconde (curvature frazionarie) allora vale l'unicità.
- Se

$$F \subset \mathring{G}, (p, X) \in \bar{J}_F^{2,+} \cap \bar{J}_G^{2,-} \Rightarrow \kappa_*(x, p, X, F) \geq \kappa^*(x, p, Y, G),$$

allora vale l'unicità.

- Tali ipotesi non includono tutti gli esempi che ci sembrano rilevanti.

Present stage: Stiamo valutando ipotesi più deboli di semicontinuita' che possano dare l'unicità... work in progress

- Perimetro Euclideo standard
- Perimetro frazionario, per $\alpha \in (0, 1)$:

$$J(E) := C_\alpha \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|\chi_E(x) - \chi_E(y)|}{|x - y|^{d+\alpha}} dx dy = \|\chi_E\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}}^2.$$

L. A. Caffarelli and P.E. Souganidis, Convergence of nonlocal threshold dynamics approximations to front propagation, ARMA (2010).

C. Imbert, Level set approach for fractional mean curvature flows, Interfaces Free Bound. (2009)

- Il pre-contenuto di Minkowski:

$$\mathcal{H}^2(\rho\text{-}\partial E) = \text{Area}(\cup_{x \in \partial E} B_\rho(x)).$$

Chambolle A., Morini M., M.P.: A non-local mean curvature flow and its semi-implicit time-discrete approximation. Siam (2012).

La curvatura frazionaria

$$J(E) := C_\alpha \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|\chi_E(x) - \chi_E(y)|}{|x - y|^{d+\alpha}} dx dy.$$

Soddisfa tutte le proprietà: invarianza per traslazioni, sub-modularità...

Curvatura κ . Seguendo Imbert, Caffarelli-Souganidis sia $\rho(x) := 1/|x|^{d+\alpha}$, $\rho_\delta(x) = (1 - \chi_{B(0,\delta)}(x))\rho(x)$.

$$\kappa_\delta(E, x) = 2 \int_{\mathbb{R}^d} (\chi_E(y) - \chi_{E^c}(y)) \rho_\delta(x - y) dy$$

$$\kappa = \lim_{\delta \rightarrow 0} \kappa_\delta.$$

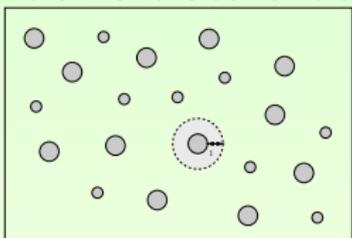
κ è la curvatura di J nel senso: se $W_n \rightarrow \{x\}$ Hausdorff,

$$J(E \cup W_n) - J(E) \geq |W_n| \kappa(x, E) + o(|E|)$$

$$J(E) := \mathcal{H}^2(\rho - \partial E) = \cup_{x \in \partial E} B_\rho(x).$$

E' stato proposto come variante del perimetro in modelli variazionali di segmentazione di immagini e denoising:

Penalizzazione del rumore



Penalizzazione dei bordi principali ∂E

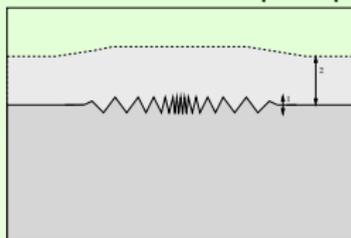
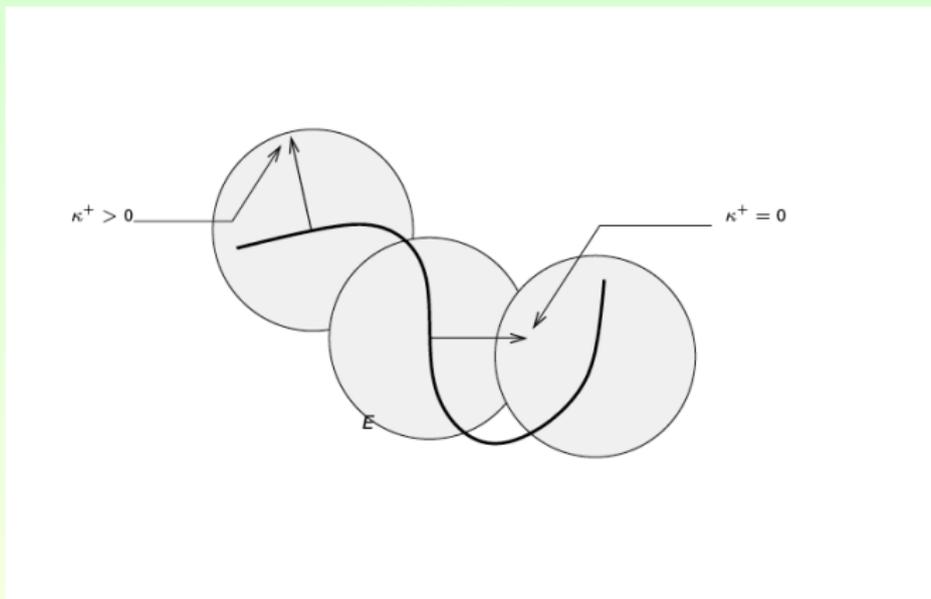


Figura: $\rho - \partial E$ “rilassa” le oscillazioni dei bordi

Barchiesi M., Kang S. H., Triet M. L., Morini M., P. M.: A variational model for infinite perimeter segmentations based on Lipschitz level set functions: denoising while keeping finely oscillatory boundaries. *Multiscale Model. Simul.* **8** (2010)

La curvatura non locale

Curvatura κ^+



$$\kappa_{\rho}^{+}(E, x) = \begin{cases} \frac{1}{2\rho} \det(I + \rho \nabla \nu_E(x)) & \text{se } \text{dist}(x + \rho \nu_E(x), E) = \rho, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\kappa_{\rho}^{-}(E, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\rho} \det(I - \rho \nabla \nu_E(x)) & \text{se } \text{dist}(x - \rho \nu_E(x), E^c) = \rho, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$\mathcal{N}_{\rho} = \{x \in \partial E : \text{i dischi della figura precedente sono tangenti}\}$

Se \mathcal{N}_{ρ} ha misura nulla allora $\kappa_{\rho} = \kappa_{\rho}^{+} + \kappa_{\rho}^{-}$ è la curvatura non locale associata a \mathcal{M}_{ρ} .

Energia regolarizzata

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ pari e decrescente in \mathbb{R}_+ . $\text{Supp } f = [-\rho, \rho]$.

$$\mathcal{M}^f(E) = \int_{\mathbb{R}^d} f(d_E(x)) dx,$$

dove d_E è la distanza con segno da ∂E (≤ 0 in E).

Teorema

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato di classe C^2 .

Per ogni $\varphi \in C^2(\partial E; \mathbb{R})$ si ha

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{M}^f(E) (\Phi_\varepsilon(E)) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{\partial E} \kappa_f(E, x) \varphi(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x),$$

dove Φ_ε è un diffeomorfismo tale che $\Phi(x) = x + \varepsilon \varphi(x) \nu_E(x)$ per $x \in \partial E$.

κ_f e' la curvatura associata a \mathcal{M}^f anche rispetto alle variazioni piu' generali considerate in precedenza

- Esistenza, unicità nel senso viscoso e approssimazione dei movimenti minimizzanti per moti per curvatura media non locale per Hamiltoniane degeneri e non-locali.
- Esistenza in senso viscoso e approssimazione dei movimenti minimizzanti per κ_f e curvatures frazionarie. Unicità per curvatures frazionarie e per una opportuna approssimazione di κ_f .

Approccio level set non variazionale per Hamiltoniane non-locali e degeneri

Ipotesi su $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \times \mathbb{M}_{\text{sym}}^{d \times d} \times \{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d) \cup \mathcal{A}(\mathbb{R}^d)\} \mapsto \mathbb{R}$

i) Invarianza per traslazioni :

$$F(x + r, p, X, E + r) = F(x, p, X, E) \text{ for every } r \in \mathbb{R}^d;$$

ii) Ellitticità : $F(x, p, X, E) \geq F(x, p, Y, E)$ se $X \leq Y$;

iii) Monotonia: $F(x, p, X, E) \geq F(x, p, X, G)$ se $E \subseteq G$;

iv) Proprietà di flusso geometrico:

$$F(x, \lambda p, \lambda X + \mu p \otimes p, E) = \lambda F(x, p, X, E) \text{ per } \lambda \geq 0, \mu \in \mathbb{R}.$$

v) **Continuità:** F è continua rispetto a x , e inoltre

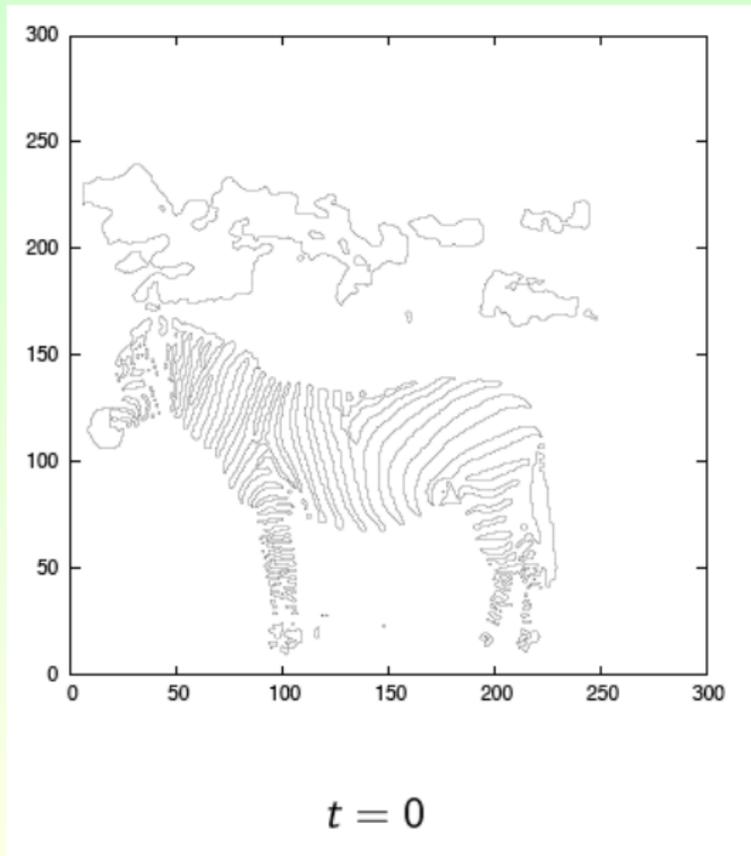
v.1) se $x_n \rightarrow x$, $p_n \rightarrow p \neq 0$, $X_n \rightarrow X$ e $\{K_n\} \rightarrow K$ nel senso di Kuratowski, allora $F(x, p, X, K) \leq \liminf_n F(x_n, p_n, X_n, K_n)$.

v.2) se $A_n^c \rightarrow A^c$, $F(x, p, X, A) \geq \limsup_n F(x_n, p_n, X_n, A_n)$.

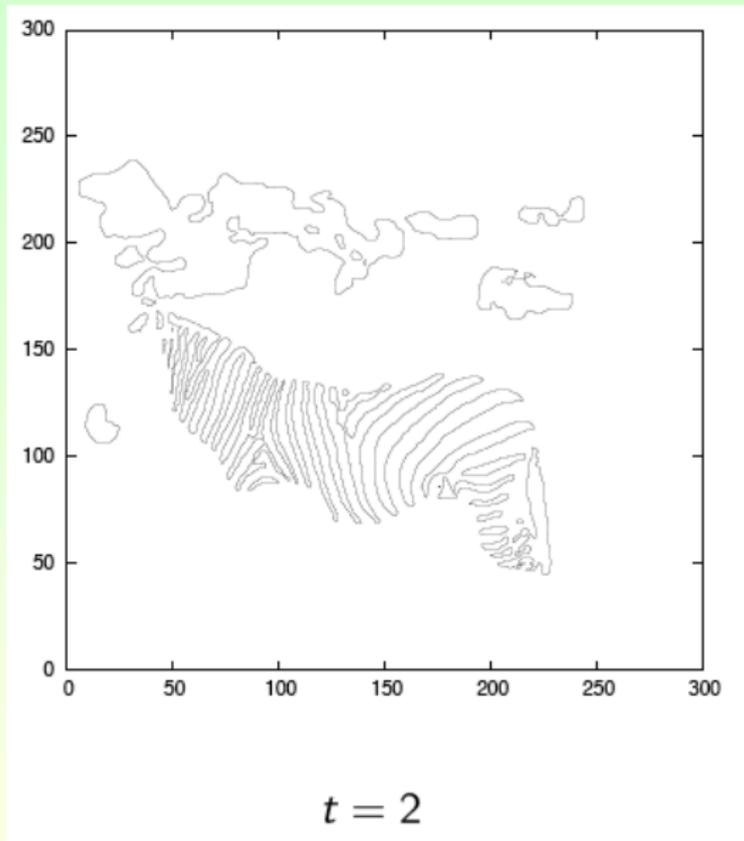
vi) **Esiste $c : (0, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ continua:**

$$-c(|p|) \leq F(x, p, \pm I, E) \leq c(|p|).$$

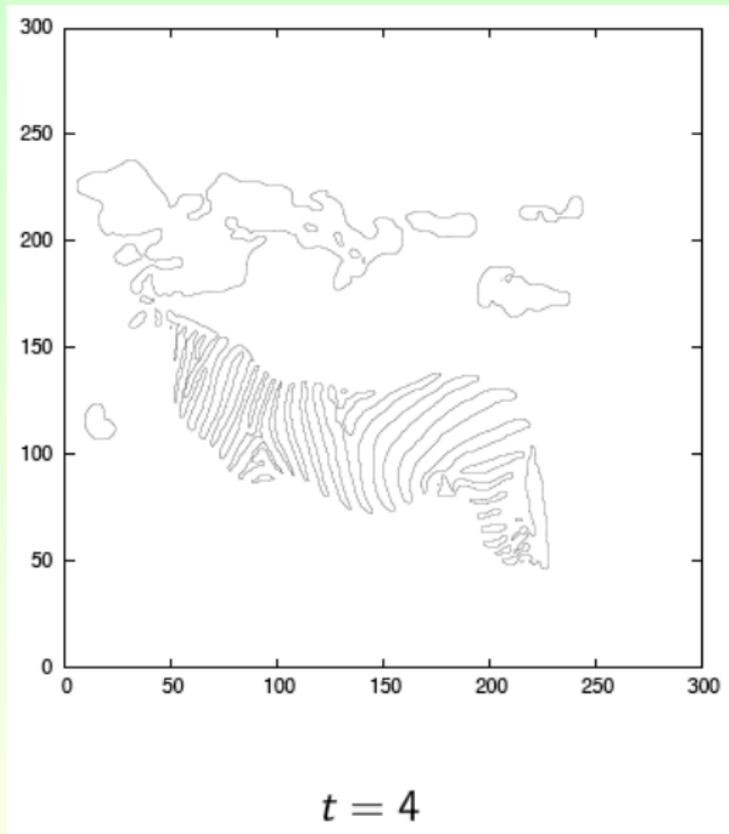
Scrinkiamo le Zebre



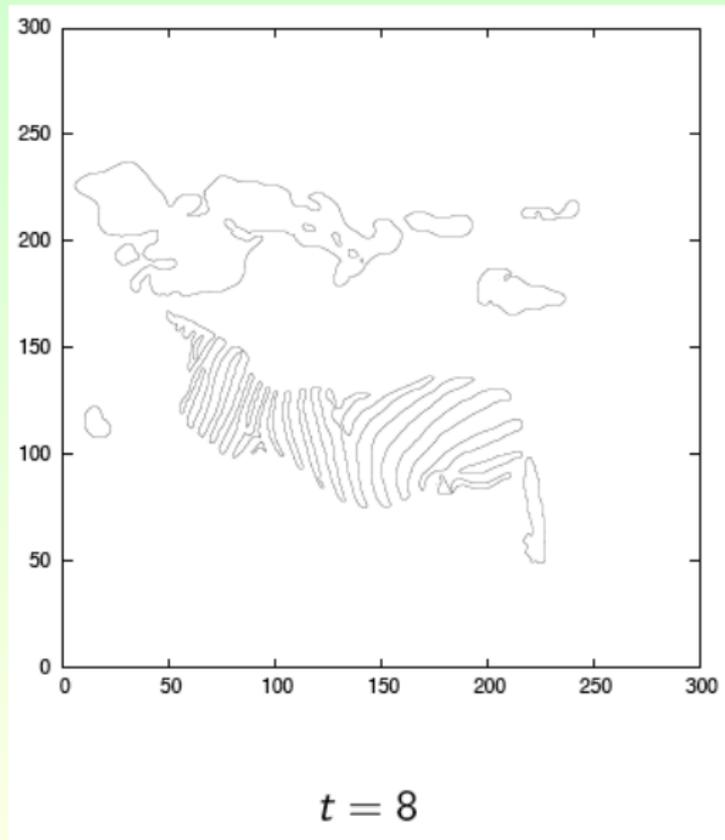
Scrinkiamo le Zebre



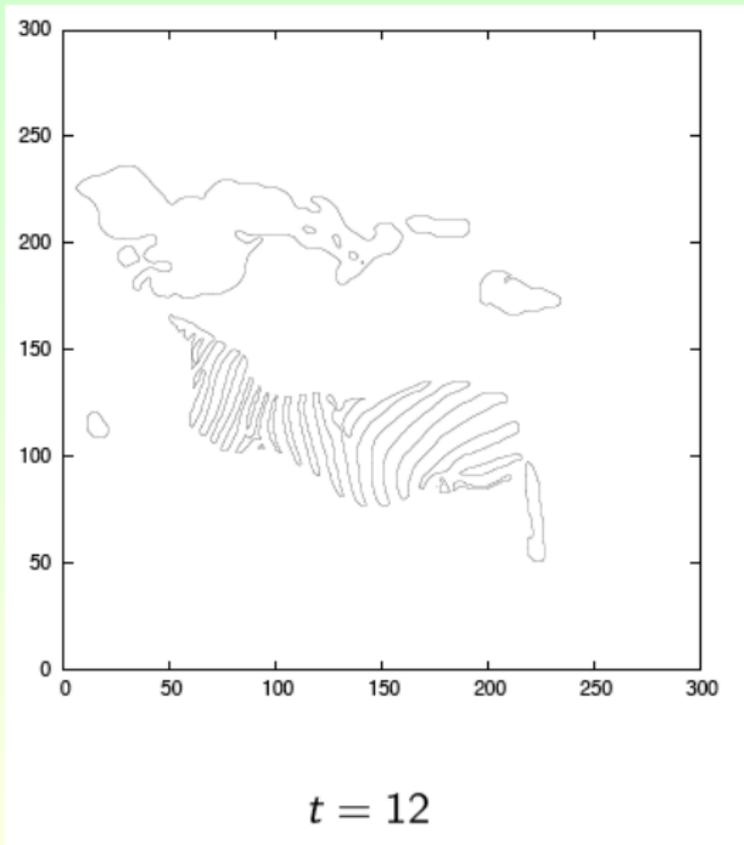
Scrinkiamo le Zebre



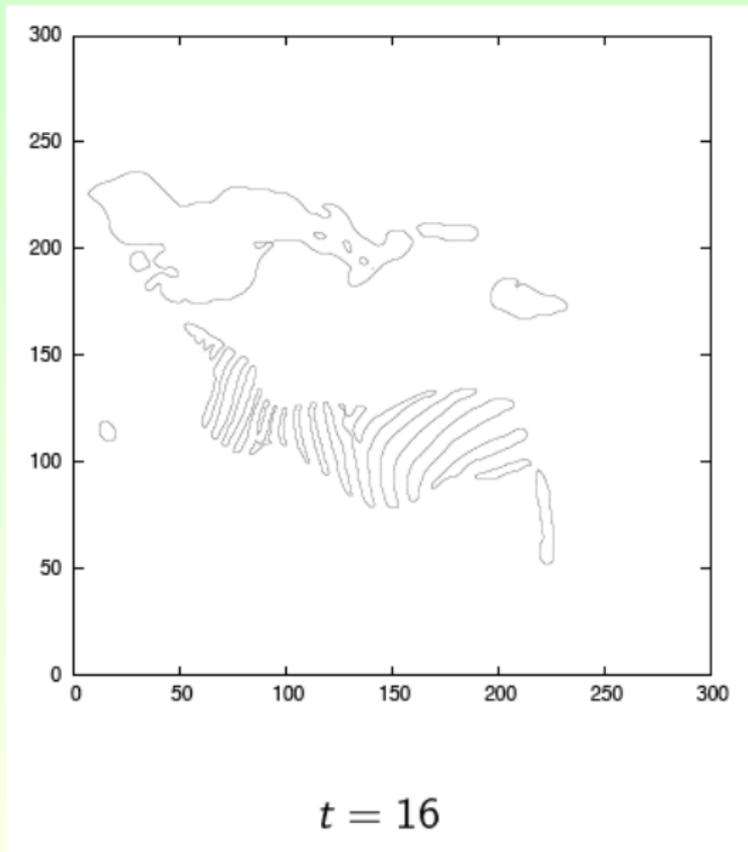
Scrinkiamo le Zebre



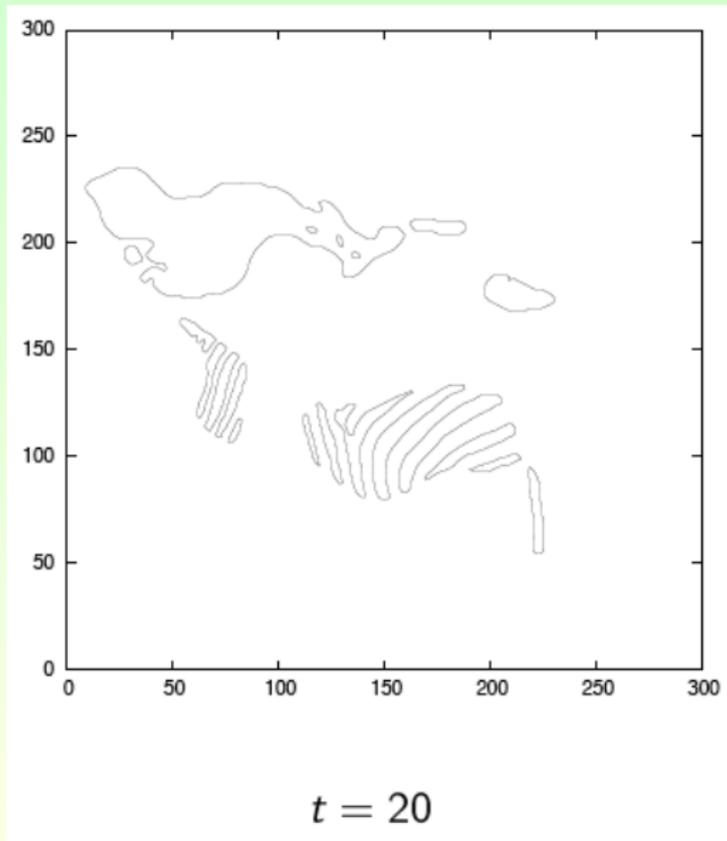
Scrinkiamo le Zebre



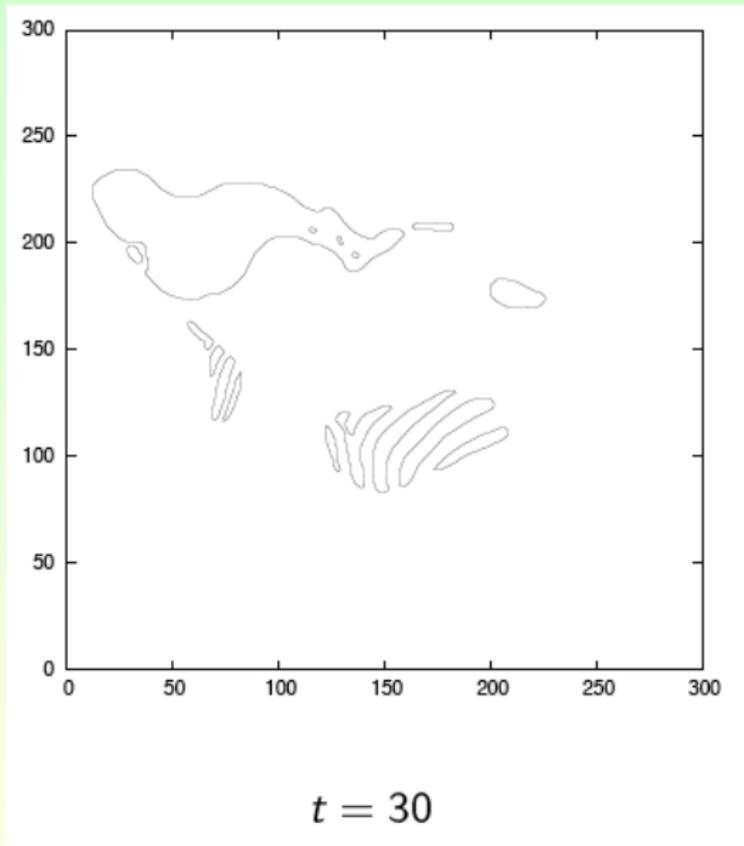
Scrinkiamo le Zebre'



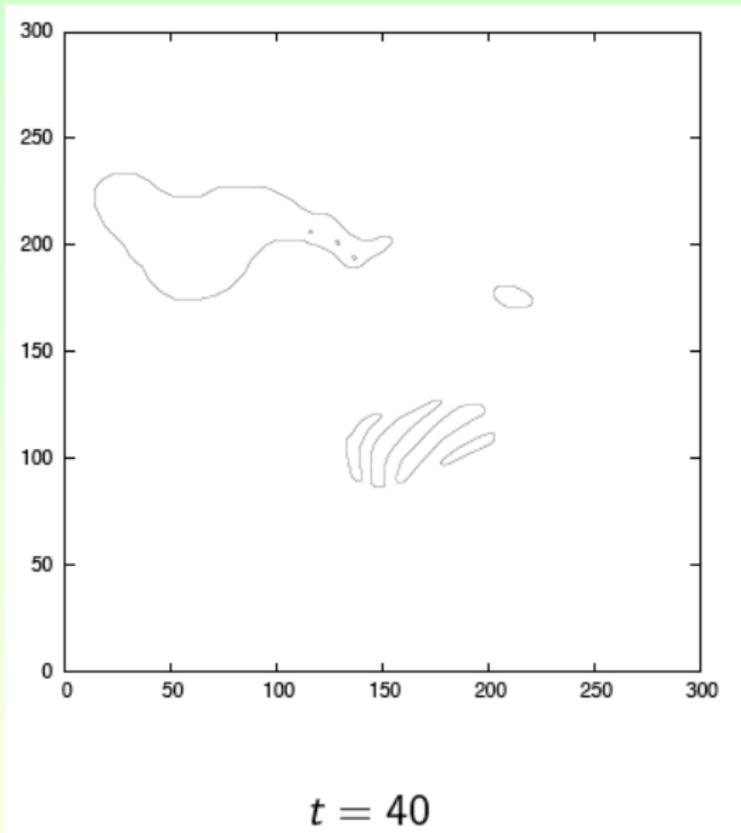
Scrinkiamo le Zebre



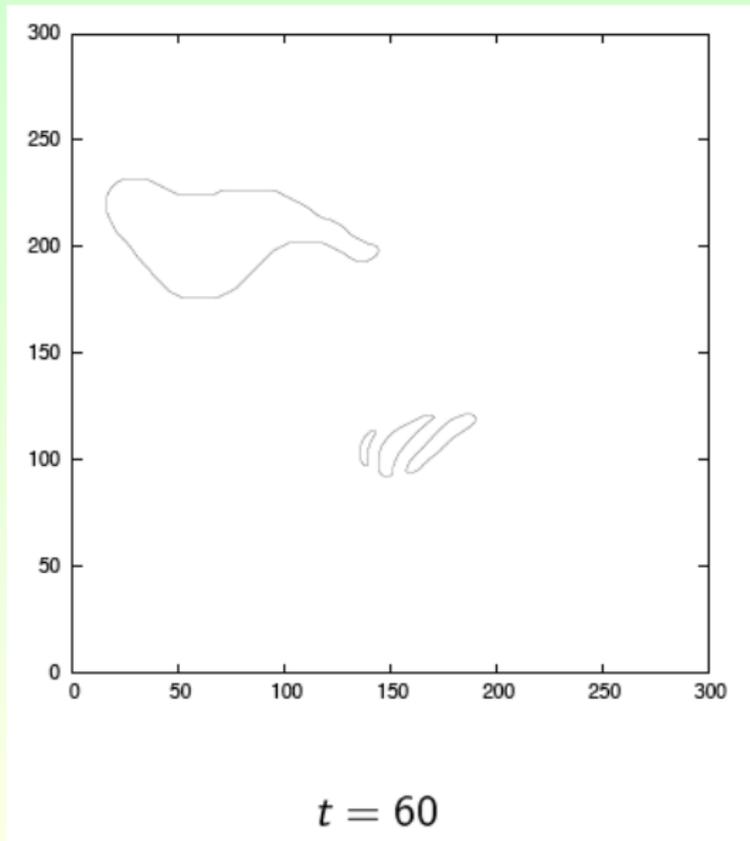
Scrinkiamo le Zebre



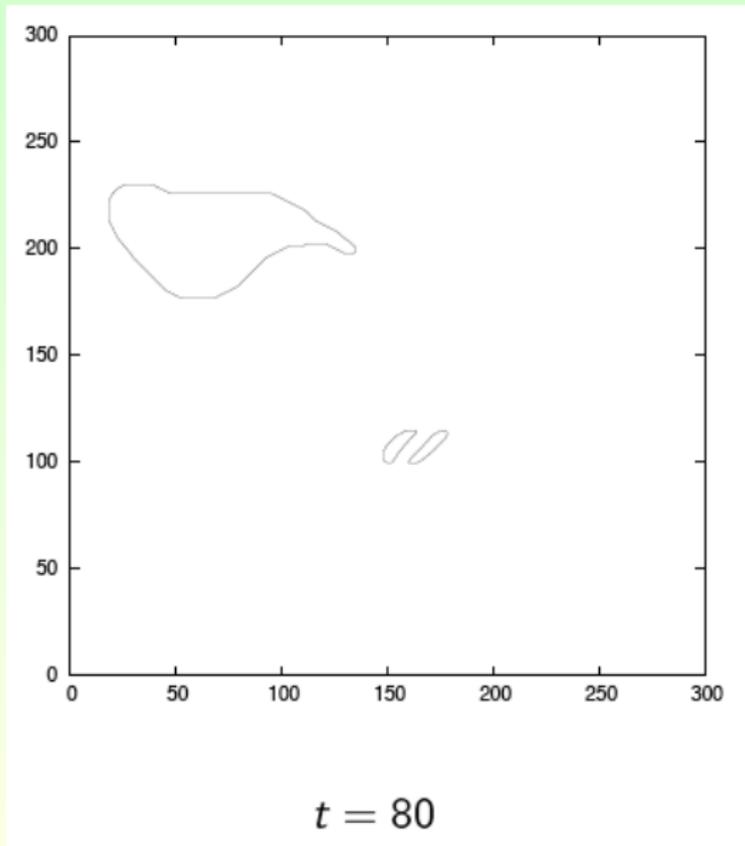
Scrinkiamo le Zebre



Scrinkiamo le Zebre



Scrinkiamo le Zebre



THE END
(del seminario e della zebra)