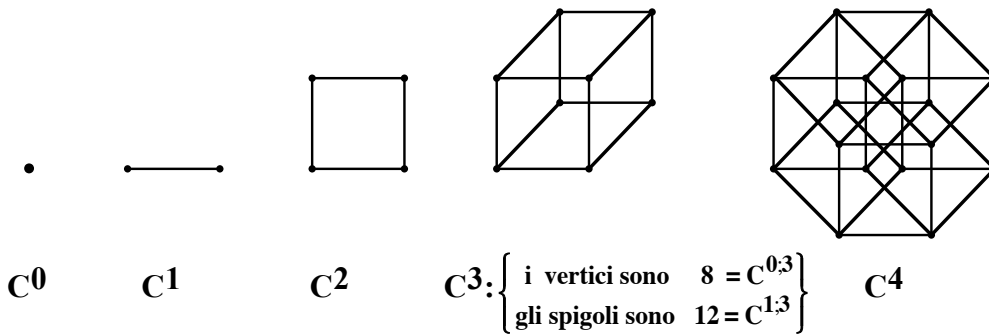


IPERCUBI: Scheda di "auto-apprendimento per induzione e analogia"



DEFINIZIONE: quando un punto C^0 si muove lungo una retta da una **posizione iniziale** ad una **finale**, esso genera un segmento C^1 costituito dalla sua **traccia** (che comprende anche i suoi estremi, cioè la "base" C^0 nelle posizioni iniziale e finale). Un quadrato C^2 è la **traccia** di una **base**, costituita da un segmento C^1 , traslata perpendicolarmente a C^1 , da una **posizione iniziale** ad una **finale** lungo un segmento di lunghezza pari a quella di C^1 .

0) un ipercubo C^j è la **traccia** di una **base**, costituita da un C^{j-1} , $j=1,2,\dots,d$, traslata **perpendicolarmente a tutti i suoi spigoli**, da una **posizione iniziale** ad una **finale** lungo un segmento di lunghezza pari a quella di C^1 .

Ricorda che C^0 è un punto e C^1 è un segmento.

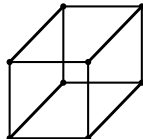
1) Quanti sono i vertici C^0 di C^4 , cioè quanto vale $C^{0;4}$?

$C^{0;4} = \dots\dots\dots$

2) Quanti sono i vertici C^0 di C^d , cioè quanto vale $C^{0;d}$?

$C^{0;d} = \dots\dots\dots$

3) C^2 , traslando da una posizione iniziale ad una finale, traccia un cubo C^3 , in particolare nel C^3 in figura **che cos'è la traccia di un vertice di C^2 ?**



Sia $C^{1;j}$ il numero degli **spigoli** di un C^j . Nel C^3 a fianco, indica con:

- 1) un pallino i 4 fra i $C^{1;3}$ che appartengono a un C^2 nella **posizione iniziale**;
- 2) una crocetta i 4 fra i $C^{1;3}$ che appartengono a C^2 nella **posizione finale**;
- 3) un trattino i 4 fra i $C^{1;3}$ tracciati dai **vertici** ($C^{0;2}$) di C^2 **nella traslazione**
- 4) E' vero (numericamente) che: $C^{1;3} = 2C^{1;2} + C^{0;2}$?

Immaginate un cubo C^3 che viene traslato per tracciare C^4 :

5a) Quanti fra i $C^{1;4}$ appartengono a C^3 nella **posizione iniziale**¹?

.....

5b) Quanti fra i $C^{1;4}$ appartengono a C^3 nella **posizione finale**?

.....

5c) Quanti fra i $C^{1;4}$ sono tracciati dai vertici di C^3 nella **traslazione**?

.....

5d) Quanto vale $C^{1;4}$? Cioé quanti sono gli spigoli di C^4 ?

¹ Un simbolo del tipo $C^{i;j}$ indicherà nel seguito sia gli oggetti C^i all'interno dell'ipercubo di dimensione j , sia il loro numero.

$$C^{1;4} = \dots\dots\dots$$

6) Quando C^2 genera C^3 , che cosa è la traccia di uno spigolo di C^2 ?

.....

Sia $C^{2;j}$ il numero dei **quadrati** di un cubo a j dimensioni.

7a) Quanti fra i $C^{2;4}$ appartengono a C^3 nella posizione iniziale?

.....

7b) Quanti fra i $C^{2;4}$ appartengono a C^3 nella posizione finale?

.....

7c) Quanti fra i $C^{2;4}$ sono tracciati dagli spigoli di C^3 durante la traslazione?

7d) In totale quanto vale $C^{2;4}$?

$$C^{2;4} = \dots\dots\dots$$

Se una domanda ti risulta difficile in dimensione maggiore di 3, può essere utile cercare di rispondere alla questione analoga in 3 o in 2 dimensioni. Le domande precedenti e **seguenti** possono aiutarvi per **completare** la seguente tabella che **deve essere riempita nei riquadri scuri**.

La tabella rappresenta un momento importante di sintesi e approfondimento che potrà servirti anche per rispondere alle domande successive.

	$C^0_{j=0}$	$C^1_{j=1}$	$C^2_{j=2}$	$C^3_{j=3}$	$C^4_{j=4}$	$C^5_{j=5}$... $C^d_{j=d}$
$C^{0;j}$	1	2	4				
$C^{1;j}$	0	1	4	12			$C^{1;d} = 2C^{1;d-1} + C^{0;d-1}$
$C^{2;j}$	0	0	1	6			$C^{2;d} =$
$C^{3;j}$	0	0	0	1			$C^{3;d} =$
$C^{4;j}$	0	0	0	0	1		$C^{4;d} =$
$C^{5;j}$	0	0	0	0	0		
Tot.			9				
...							
$C^{i;j}$							$C^{i;d} =$

Guardando anche alla tabella, rispondi alle seguenti domande:

8) Quanti sono i cubi C^3 di un ipercubo C^4 , cioè quanto vale $C^{3;4}$?

$$C^{3;4} = \dots\dots\dots$$

9) Quanti sono gli spigoli C^1 di un C^5 , cioè quanto vale $C^{1;5}$?

$$C^{1;5} = \dots\dots\dots$$

10) Quanti sono i quadrati C^2 di un C^5 , cioè quanto vale $C^{2;5}$?

$$C^{2;5} = \dots\dots\dots$$

11) Quanti sono i cubi C^3 di un C^5 , cioè quanto vale $C^{3;5}$?

$$C^{3;5} = \dots\dots\dots$$

12) Esprimete il n° dei C^2 di un C^4 ($= C^{2;4}$) attraverso i $C^{2;3}$ e i $C^{1;3}$.

$$C^{2;4} = \dots\dots\dots$$

13) Esprimete il n° dei C^3 di un $C^4 (= C^{3;4})$ attraverso i $C^{3;3}$ e i $C^{2;3}$.

$$C^{3;4} = \dots\dots\dots$$

14) In generale esprimete $C^{i;d}$ attraverso i $C^{i;d-1}$ e i $C^{i-1;d-1}$.

$$C^{i;d} = \dots\dots\dots$$

15) Un cubo C^3 è la traccia di uno qualsiasi dei suoi C^2 ?

In C^3 : - ci sono C^1 che non appartengano ad un C^2 ? ...

- ci sono C^2 che non appartengano al C^3 ? ...

Ricorda che ad es. il coefficiente binomiale $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$ indica il numero dei modi in cui si possono scegliere 3 oggetti su 5.

$\binom{d}{j}$ è il numero di modi di scegliere j oggetti su d. $\binom{d}{0} = 1, \binom{d}{1} = d, \binom{d}{d} = 1$.

Rispondi alle domande n°: 18c, 19c, 22c, 23c, 24c attraverso i coefficienti binomiali; ad es. i quadrati in un vertice di C^3 , cioè i $C^{2,0,3}$, sono $\binom{3}{2}$ perchè in ogni vertice di C^3 ci sono 3 spigoli e scegliendone comunque 2 si individua un C^2 ; infatti non ci sono spigoli che non appartengano ad un quadrato. Sia O il vertice di C^4 che ha generato il primo spigolo, che a sua volta ha generato il primo quadrato, che ha generato il primo cubo, che ha generato C^4 .

16) Quanti sono gli spigoli di C^4 in un vertice O? Cioè quanto vale $C^{1,0,4}$?

$$C^{1,0,4} = \dots\dots\dots$$

17) C^4 è la traccia di uno qualsiasi dei suoi C^3 ? ...

In C^4 : - 1) ci sono C^1 che non appartengano ad un C^2 ? ...

- 2) ci sono C^2 che non appartengano ad un C^3 ? ...

- 3) ci sono C^3 che non appartengano al C^4 ? ...

18c) Quanti sono i cubi in un vertice O di C^4 ? Cioè quanto vale $C^{3,0,4}$?

$$C^{3,0,4} = \dots\dots\dots$$

19c) Quanti sono i quadrati in un vertice di C^4 ? Cioè quanto vale $C^{2,0,4}$?

$$C^{2,0,4} = \dots\dots\dots$$

20) Quanti sono gli spigoli di C^d in un vertice? Cioè quanto vale $C^{1,0,d}$?

$$C^{1,0,d} = \dots\dots\dots$$

21) Un ipercubo C^d è la traccia di uno qualsiasi dei suoi C^{d-1} ?

22c) Quanti sono i quadrati in un vertice di C^d ? Cioè quanto vale $C^{2,0,d}$?

$$C^{2,0,d} = \dots\dots\dots$$

23c) Quanti sono i cubi in un vertice O di C^d ? Cioè quanto vale $C^{3,0,d}$?

$$C^{3,0,d} = \dots\dots\dots$$

24c) Quanto vale $C^{h,0,d}$ $C^{h,0,d} = \dots\dots\dots$

25!) Se nella tabella hai verificato qualche regolarità, nella riga dei totali, prova a darne una giustificazione o una dimostrazione.