CASTELNUOVO E., GORI-GIORGI C. & VALENTI D. (1985). Mathématiques a l'Age de l'ordinateur. Quel genre de capacités devons-nous former chez les élevés? *Actes CIEAEM* 37, 216-220

MATHEMATIQUES A L'AGE DE L'ORDINATEUR QUEL GENRE DE CAPACITES DEVONS-NOUS FORMER CHEZ NOS ELEVES?

CETTE étude a été motivée par deux différentes considérations: l'une concernant la didactique et la recherche dans l'éducation mathématique, l'autre concernant de problèmes sociaux d'aujourd'hui.

Il est clair que, à l'âge de l'ordinateur, l'enseignement des mathématiques doit renforcer son caractère logique et analytique. Mais il est moins évident qu'il doit, en même temps, mettre l'accent sur l'intuition et l'imagination créative; et ceci pour deux raisons:

— pour avancer en mathématiques indépendamment des ordinateurs;
— pour aider les ordinateurs, en créant, pour eux, des techniques convenables.

La seconde considération est dictée par le contexte social d'aujourd'hui. Le problème, toujours plus grave, du chômage a conduit, tout récemment, sociologues et industriels à la conclusion suivante: il faut que les jeunes reçoivent à l'école une formation flexible, capable de les préparer, dans le futur, à changer fréquemment de travail, en acceptant les activités fort différentes de leur spécialisation. Il est clair que chaque discipline doit former cet esprit ouvert, mais, à notre avis, c'est surtout l'enseignement des mathématiques qui peut avoir une influence particulière en ce sens, soit pour la variété des raisonnements soit pour la richesse des sujets. On se demande: à ce but, quel genre de mathématique devrions-nous enseigner? Par quel méthodes pouvons-nous former une mentalité particulièrement flexible?

Réfléchissons: on est obligé de passer d'une méthode à l'autre lorsqu'on n'est pas soutenu par l'analogie. Or, ce manque d'analogie est typique de la géométrie de l'espace par rapport à la géométrie du plan. C'est justement pour cette raison que nous avons développé, avec des élèves âgés de 16-17 ans, deux sujets de la géométrie de l'espace, très liés l'un à l'autre, en les comparant avec des sujets analogues de la géométrie du plan:

1. la somme des dièdres d'un tétraèdre, comparée à la somme des angles d'un triangle;
2. la notion d'équivalence des polyèdres, comparée à la notion analogue concernant les polygones.

Considérons le premier sujet.

Somme des dièdres d'un tétraèdre

Dans la géométrie du plan la somme des angles d'un triangle est constante, c'est-à-dire qu'elle ne tient pas à la forme du triangle. Le problème analogue dans l'espace sera de considérer les dièdres d'un tétraèdre. La fig.1 montre un tétraèdre droit ayant pour base un

triangle équilatéral.
On a indiqué par:

α le dièdre entre chaque face et la base;
β le dièdre entre deux faces.

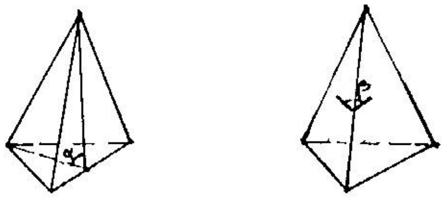


fig.1.

Des considérations dynamiques suggérées par un simple 'appareil';

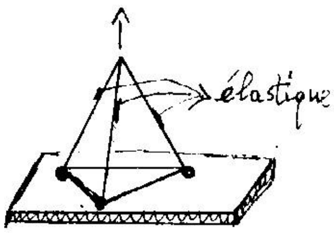
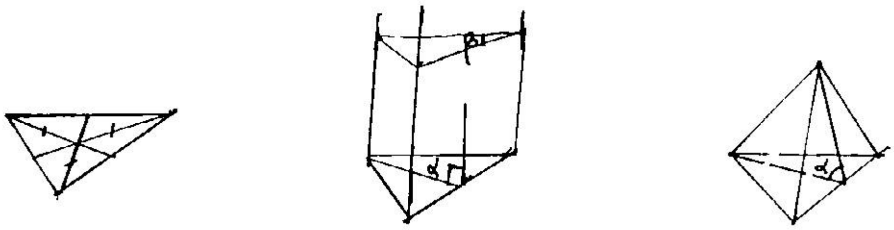


fig.2.

conduisent à intuire que *la somme:*

$s = 3\alpha+3\beta$

change selon la forme du tétraèdre; en effet, si on considère les deux cas limite et le cas du tétraèdre régulier, on a les situations illustrées dans les figures 3, où on a indiqué par R l'angle droit.



$\alpha=0$
$\beta=2R$
$S=3\alpha+3\beta=6R$

$\alpha=1R$
$3\beta=2R$
$S=3\alpha+3\beta=5R$

$\beta=\alpha<1R$
$S=6\alpha<6R$

fig.3.

Or, le fait que la somme $S = 3\alpha + 3\beta$ change par continuité, conduit à une importante conclusion: *la valeur de S* sera donnée, en général, *par un nombre irrationel d'angles droits.* On verra que cette observation résultera fort importante pour éclaircir le second sujet.

On doit remarquer que ces considérations peuvent être développées aussi avec des très jeunes élèves: le but sera non pas seulement de comparer propriétés analogues du plan et de l'espace, mais aussi celui d'exercer la vision spatiale. Il est certain que si on veut une recherche plus poussée on doit avoir recours à la trigonométrie.

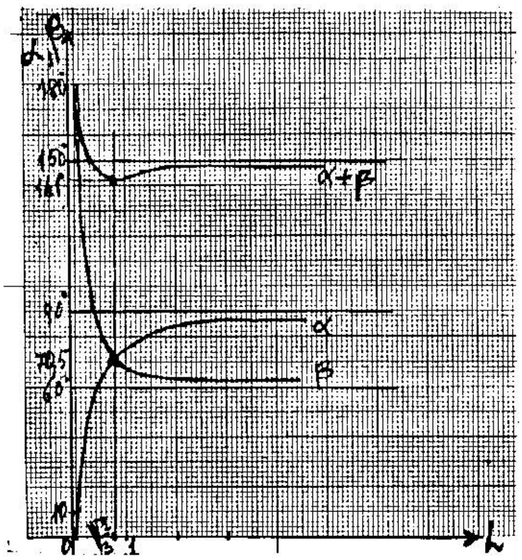


fig.4.

Après avoir calculé la tangente de α et de β, en fonction de la hauteur h du tétraèdre, il est très intéressant de dessiner (fig.4), par points, le graphique de α et de β; ensuite, de ces deux graphiques, on arrive, par addition (qu'on peut effectuer soit 'à la main' soit avec l'aide d'un ordinateur), à la somme $\alpha + \beta$. Le minimum de $\alpha + \beta$ se réalise dans le cas du tétraèdre régulier, c'est-à-dire lorsque $\beta = \alpha$. Ce résultat, obtenu par le dessin, on peut évidemment l'avoir par l'analyse, et donc à un niveau plus haut.

Venons maintenant au second sujet.

La notion d'équivalence entre les polyèdres

Cette notion représente un point 'historique': c'est, en effet, seulement au début de ce siècle que le manque d'analogie entre l'équivalence des polyèdres et celle des polygones a été mis en relief. C'est le mathématicien allemand Max Dehn qui, en 1903, a démontré que deux polyèdres peuvent avoir le même volume sans être décomposables en parties polyédriques égales. La démonstration de Dehn est très longue et subtile. D'autres démonstrations ont été données plus récemment; entre autre une démonstration du mathématicien espagnol J.Rey Pastor qui fait recours à l'analyse.

Notre but était seulement de donner aux élèves une idée de cette curieuse propriété négative, de cette non-analogie. On a commencé par présenter deux conteniteurs de lait, bien connus: un cube et un tetrapack ayant la capacité d'un demilitre. On a porté l'attention sur les dièdres, plus précisement sur la somme des dièdres d'un cube et d'un tétraèdre. On a, indiquant toujours par *R* l'angle droit:

(1) pour *le cube* : $S_{\text{dièdres}}$ = 12 fois de R
pour *le tétraèdre* : $S_{\text{dièdres}}$ = nombre irrationel de fois de R.

Et maintenant allons sectionner le cube par des plans. Il suffit d'examiner les quelques exemples représentées dans la fig.5 pour se rendre compte que, lorsqu'on coupe le cube en parties polyédriques $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$, la somme 12R est altérée d'un multiple de R.

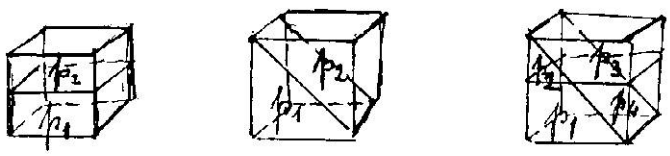


fig.5.

Or, cette propriété a un caractère général: *en coupant un polyèdre P dans un certain nombre de polyèdres* $p_1, p_2, \cdots p_n$ *la somme des dièdres change d'un multiple de R.*
C'est-à-dire, on a:

(2) $S_{\text{dièdres de } p_1, p_2, \cdots p_n} = S_{\text{dièdres de } P}$ (module R).

Revenons maintenant au tétraèdre.
Considérons un tétraèdre dont la somme des dièdres est égale à un nombre irrationel d'angles droits, et comparons ce tétraèdre avec un cube ayant le même volume. Peut-il arriver que les pièces polyédriques $p_1, p_2, \dots p_n$, placées de façons differentes, forment soit le cube soit le tétraèdre? Réfléchissons: si ce fait se vérifie, la (1) et la (2) conduisent à écrire:

12 fois de R= nombre irrationel de fois de R.

La conclusion absurde à laquelle on arrive tient à l'hypothèse que cube et tétraèdre étaient composés par le même nombre de parties polyédriques égales. Le résultat de ce raisonnement est donc le suivant: un cube et un tétraèdre peuvent avoir le même volume sans être equi-décomposables.
Cet exemple suffit pour comprendre que la signification d'équivalence est, pour les polyèdres, plus large que celle d'équi-décomposabilité.
Cherchons, à la fin, de tirer, de ces exemples une conclusion.
Nous sommes partis de considérations générales concernant soit la didactique et la recherche soit des gros problèmes de notre société. Nous avons mis en relief la nécessité de donner à nos élèves une mentalité flexible et ouverte. Les exemples que nous venons de présenter montrent

qu'aussi un sujet de géométrie classique est à même de susciter cette disponibilité mentale, mais *à une condition* : on ne doit jamais mépriser la vision concrète et spatiale, premier pas vers le 'savoir voir en mathématique'.

Emma Castelnuovo
Claudio et Daniela Gori-Giorgi
Ecole sécondaire
Roma/Italia.