

CASTELNUOVO E. (1982c). Géométrie et autres disciplines. Noel G. (ed.) *Colloque International sur l'enseignement de la géométrie*, Mons: Université de L'Etat. 157-165

GÉOMÉTRIE ET AUTRES DISCIPLINES

Emma CASTELNUOVO
Ecole Secondaire, Italie

Je veux dire tout de suite que les quelques exemples dont je vais parler viennent d'une longue expérience d'enseignement dans les écoles secondaires en Italie.

Libre, comme il a toujours été, de donner aux programmes les interprétations les plus variées, le professeur de mathématiques du 1er cycle secondaire (âge des élèves : 11-14 ans) est aujourd'hui officiellement encouragé à donner une place de relief à l'interdisciplinarité. Le but est surtout social : nous voulons une mathématique pour tous, une mathématique qui donne une culture largement scientifique, une mathématique qui puisse aider à la formation du futur citoyen.

La liaison de la géométrie aux autres disciplines peut se concevoir selon deux méthodes didactiques :

- 1) développer un cours de géométrie "fermé en soi-même" et appliquer successivement les théories étudiées aux autres disciplines;
- 2) mettre les différentes disciplines, y compris la géométrie, "sur le même plan" et étudier toute la richesse de leur interaction.

Je suis décidément pour cette seconde méthode.

Parmi les disciplines, c'est la physique qui a toujours eu des rapports particulièrement fructueux avec la géométrie. Un exemple suffit à montrer la force de cette interaction sur le plan didactique.

Il est bien connu que les enfants ont de grandes difficultés pour découvrir, tous seuls, la loi du levier, et cela jusqu'à l'âge de 13-14 ans. Jean PIAGET a consacré une étude spéciale à l'investigation de ces difficultés : l'intuition physique n'aide pas à saisir l'invariant "poids multiplié par bras du levier". C'est une intuition géométrique qui conduit à cette découverte : il suffit de penser aux deux rectangles "suspendus" à la barre du levier, et qui ont comme dimensions bras et poids, ce dernier représenté par un segment (fig. 1). "On voit" alors que les deux rectangles s'équilibrent s'ils ont la même aire.

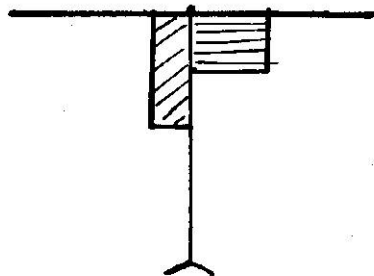


fig. 1

La découverte de la loi du levier conduit de la physique à des découvertes géométriques : c'est en effet la loi du levier qui permet de découvrir la position du barycentre d'un triangle. Un triangle ABC (fig. 2) : des poids égaux (par exemple égaux à 1) sont appliqués aux sommets.

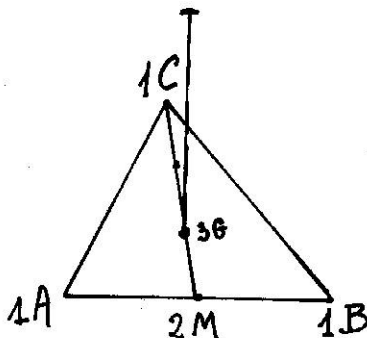


fig. 2

On détermine le barycentre M du levier AB : le poids appliqué à M sera égal à 2. Ensuite, on détermine le barycentre du levier CM : on a G avec le poids 3. G est le barycentre du triangle ABC. Une fois déterminée la position du barycentre d'un triangle homogène, le sens physique nous fait penser à un triangle non homogène : il est évident que si les poids appliqués aux sommets ne sont pas égaux, la position du barycentre va changer (fig. 3)

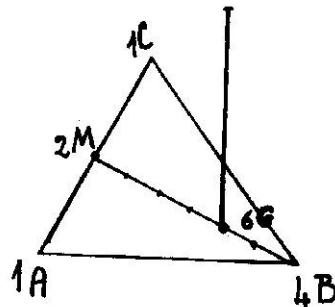


fig. 3

Le triangle apparaît comme "ponctué de barycentres" : on arrive à la géométrie du triangle barycentrique [1]. Dans ce plan coordonné c'est encore une fois la physique qui nous conduit, d'une façon tout à fait élémentaire, à la détermination de l'équation d'une droite, en l'envisageant comme "la lame du couteau sur laquelle se balance le triangle".

La richesse des applications de la géométrie du triangle barycentrique est bien connue : de la programmation économique, et donc de problèmes qui sont particulièrement sentis par les élèves dans ces années de crise, à la composition des couleurs, chaque couleur étant obtenue comme somme de différentes intensités de lumières rouge, bleu, vert, "appliquées" aux sommets. De cette dernière théorie, envisagée par H. GRASSMANN il y a plus d'un siècle, on arrive à l'art (le divisionisme) et à la technologie (la télévision en couleurs).

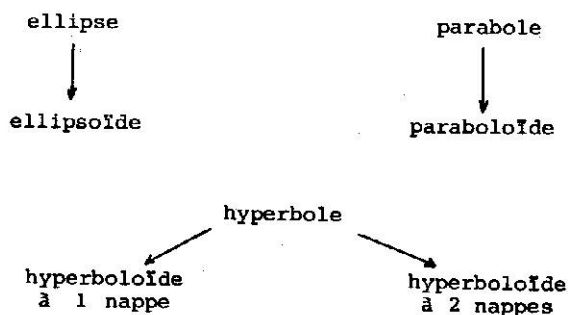
Physique, géométrie, économie, art, technologie, ...

C'est justement l'intérêt des élèves pour la technologie qui nous a poussé à développer des chapitres de géométrie qui ont été ces dernières années laissés de côté : les transformations projectives et les quadriques.

GEOMETRIE PROJECTIVE. Depuis une dizaine d'années, on trouve des ordinateurs spécialisés en systèmes graphiques : on peut avoir en

quelques instants le dessin d'un solide en perspective, vu de différents points d'observation. Or — et ceci est important — il faut montrer aux élèves qu'un ordinateur "marche" si l'homme lui donne les instructions. Dans ce cas, si on veut avoir le dessin en perspective d'un solide, par exemple d'un édifice ayant la forme de parallélépipède rectangle, il faudra donner à l'ordinateur non pas seulement les coordonnées de huit sommets (et donc 24 nombres) et les coordonnées du point d'observation (encore 3 nombres), mais — chose essentielle — les équations de la projectivité, ne pouvant, évidemment, lui expliquer les règles des peintres de la Renaissance. Voici donc une motivation pour développer l'étude des transformations projectives, étude qu'on peut traiter en se basant seulement sur des notions fort élémentaires [2].

LES QUADRIQUES. On sait bien que les élèves, aussi fort jeunes, sont fascinés par l'architecture, et, en particulier, par les constructions les plus simples, les plus "linéaires", comme si, inconsciemment, ils sentaient qu'il y a là toute la force de la mathématique. C'est justement pour satisfaire à cet intérêt technico-artistique que j'ai commencé il y a une dizaine d'années à étudier les quadriques, avec des enfants âgés de 13 à 14 ans. Voici quelques idées à ce sujet [3]. En faisant tourner une conique autour d'un de ses axes, on obtient quatre quadriques (fig. 4), surfaces qui ont comme sections des coniques. On a :



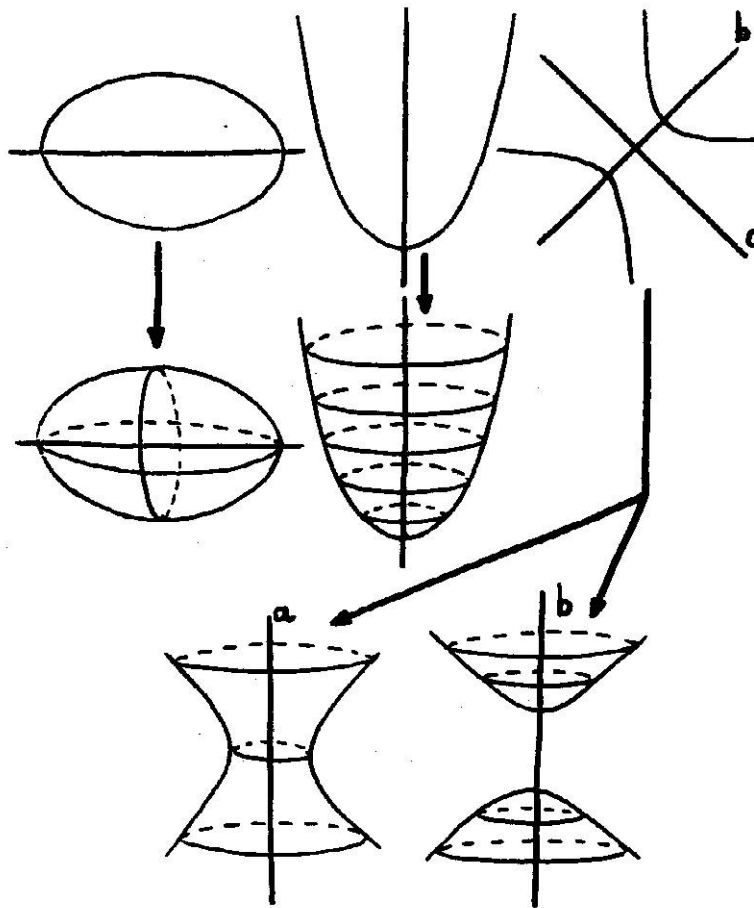


fig. 4

Parmi ces quatre quadriques, il y en a une qui est réglée, c'est-à-dire qui est formée de droites : c'est l'hyperboloïde à une nappe. (fig. 5)

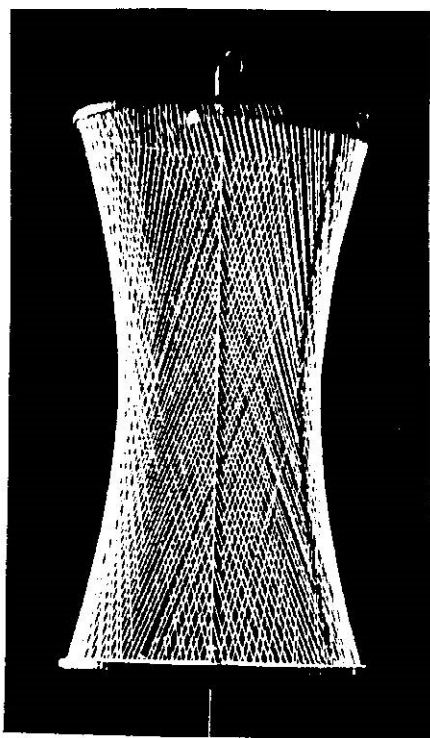


fig. 5

C'est justement le fait d'être engendrée par des droites qui lui donne des intéressantes utilisations en architecture : piliers de soutien, cheminées d'usine, ...

Les quatre quadriques obtenues, étant de révolution, contiennent un système de cercles parallèles. Or, un cercle peut être transformé par affinité en ellipse : il suffit de "l'étirer". La même idée conduit à transformer ces quadriques de révolution en quadriques qui ne sont pas de révolution et qui contiennent donc

un système d'ellipses parallèles (fig. 6)

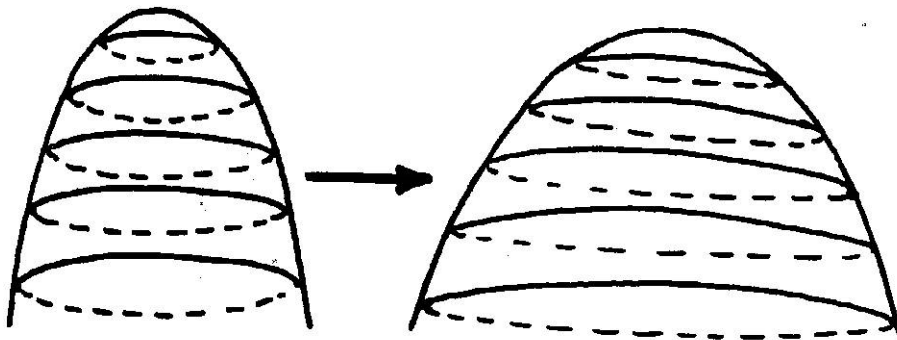


fig. 6

Mais il y a une quadrique qui n'a pas de système d'ellipses parallèles et qui, donc, échappe à la liste indiquée : c'est le paraboloid hyperbolique (ou à selle). Sa parenté avec le paraboloid elliptique est très étroite : le paraboloid elliptique peut se concevoir réalisé par une "parabole-guide" sur laquelle se trouvent "à califourchon" des paraboles égales (fig. 7) dont les axes ont la même direction et le même sens que l'axe de la parabole-guide.

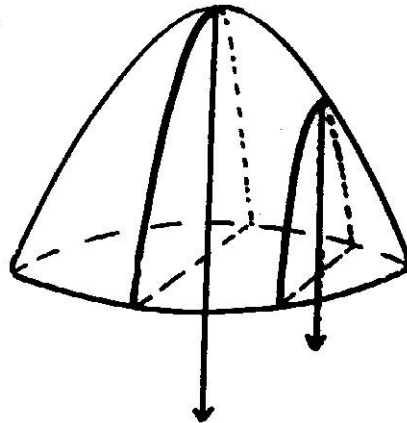


fig. 7

164.

Or, si on tourne la parabole-guide de façon qu'elle présente sa concavité dans l'autre sens (fig. 8), les axes des autres paraboles auront, maintenant, le sens contraire à celui de la parabole-guide.

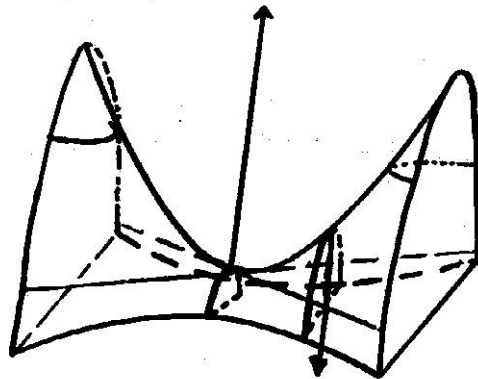


fig. 8

On obtient ainsi une nouvelle surface : c'est le parabololoïde hyperbolique (ou à selle). On peut aussi arriver facilement à son équation en se basant sur la théorie des barycentres. On découvre qu'il s'agit d'une quadrique réglée (fig. 9)

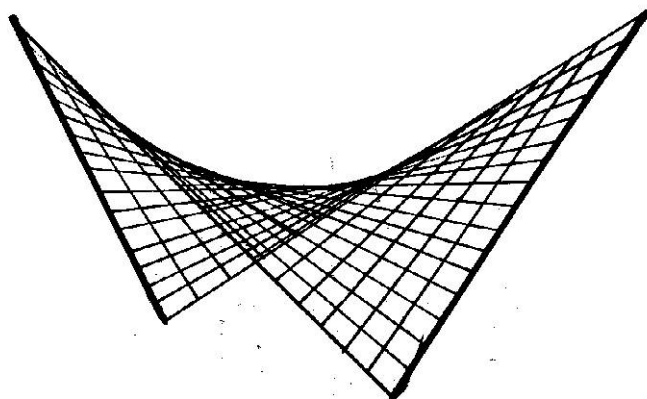


fig. 9

C'est justement cette propriété qui a fait penser à son utilisation dans l'architecture : c'est Félix CANDELA (professeur à la Polytechnique de Mexico) qui, dans les années 1945-50, a eu l'idée géniale de cette application. On a eu, successivement, des réalisations fameuses, comme par exemple le pavillon Philips projeté par LE CORBUSIER à l'occasion de l'Expo 1958 à Bruxelles.

Mais je vais m'arrêter, ces quelques exemples suffisant — me semble-t-il — à donner une idée de la signification qu'on peut attribuer au thème "géométrie et autres disciplines".

Je voudrais quand-même souligner le fait que bien des fois, et ceci est ressorti des exemples donnés, il est difficile d'isoler le rôle de la géométrie de celui de la mathématique, et d'autres fois on sort des disciplines strictement scolaires pour se plonger dans la réalité elle-même. C'est dans ce sens très large que je vois la richesse de cette interaction.

1. E. CASTELNUOVO, "Différentes représentations utilisant la notion de barycentre"; *ICMI Congress*, Lyon 1968 (reproduit en "*Educational Studies in Mathematics*", 1969). Voir aussi le chapitre sur le Calcul barycentrique dans le livre de E. CASTELNUOVO et M. BARRA, "Mathématiques dans la réalité"; éd. CEDIC, Paris (traduit de l'italien "*Matematica nella realtà*"; éd. Boringhieri, Torino).
 Bien des idées viennent d'un chapitre sur ce sujet du livre "*Mathematik in der Wissenschaft und im alltäglichen Leben*" par H. FREUDENTHAL.
2. E. CASTELNUOVO, C. et D. GORI-GIORGI, "La géométrie projective à l'école"; *Educational Studies in Mathematics*, N. 7, 1976.
3. E. CASTELNUOVO et M. BARRA, "Mathématiques dans la réalité", chapitre sur les quadriques; CEDIC, Paris.