Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 11 , Roma (1991), 133-156

Sugli Ideali Principali dell'Anello delle Coordinate di una Varietà Proiettiva e la Proprietà S_2

L. GUERRA(*)

RIASSUNTO – *L'anello delle coordinate R di una varietà proiettiva $X = \operatorname{Proj} R$ è un sottoanello di $S = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} R-\{\mathfrak{m}\}} R_\mathfrak{p} \subseteq R^{(1)} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} R, \operatorname{ht}\mathfrak{p}=1} R_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{m}$ = ideale irrilevante di R). In questo articolo le tre uguaglianze $R = R^{(1)}$, $R = S$, $S = R^{(1)}$ sono caratterizzate tramite la decomposizione primaria degli ideali principali di R, la proprietà S_2 in R (o X), o proprietà di certi sottoinsiemi aperti densi di $\bigcup \operatorname{Proj} \operatorname{Sym} R_n$, collegati al teorema di Bertini.*

ABSTRACT – *The homogeneous ring R of a projective variety $X = \operatorname{Proj} R$ is a subring of $S = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} R-\{\mathfrak{m}\}} R_\mathfrak{p} \subseteq R^{(1)} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} R, \operatorname{ht}\mathfrak{p}=1} R_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{m}$ = irrelevant ideal of R). In this article the three equalities $R = R^{(1)}$, $R = S$, $S = R^{(1)}$ are characterized by means of primary decomposition of principal ideals of R, property S_2 in R (or X), or properties of certain dense open subsets of $\bigcup \operatorname{Proj} \operatorname{Sym} R_n$ related with Bertini's theorem.*

KEY WORDS – *Algebre graduate - Varietà proiettive - Divisori.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 14A05

– Introduzione

Sia $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ un dominio commutativo graduato e si ponga: $\mathfrak{m} = \bigoplus_{n\geq 1} R_n$, $\overline{R}$ = chiusura integrale di R, $S = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A-\{\mathfrak{m}\}} R_\mathfrak{p}$, $R^{(1)} =$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei progetti di ricerca finanziati dal M.P.I.

$\bigcap_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} A, \operatorname{ht} \mathfrak{p}=1} R_{\mathfrak{p}}$. Sussistono allora le inclusioni:

$$(*) \qquad R \subseteq S \subseteq R^{(1)} \subseteq \overline{R}.$$

L'uguaglianza $R = \overline{R}$, espressa anche dalla locuzione: la varietà proiettiva $X = \operatorname{Proj} R$ è proiettivamente normale, è caratterizzata come ben noto dalle cosiddette condizioni di normalità di Serre R_1 e S_2. L'uguaglianza $S = \overline{R}$ caratterizza invece le varietà X normali, cioè tali che $R_{(\mathfrak{p})}$ è normale per ogni $\mathfrak{p} \in X$ (cfr. [11], ch. V, §5).

In questo lavoro le uguaglianze $R = R^{(1)}$, $R = S$, $S = R^{(1)}$ vengono caratterizzate in vario modo, con particolare riferimento alla proprietà S_2; si mostra altresì che le inclusioni (*) possono essere contemporaneamente tutte strette. Si introduce infine, con riferimento all'anello $R^{(1)}$, una nozione di equivalenza di divisori che coincide con l'equivalenza lineare se e solo se $R = R^{(1)}$ (ovvero: R soddisfa alla condizione S_2).

Più precisamente, vengono riassunte nel §1 le proprietà essenziali di carattere generale (alcune delle quali ben note) relative alle proprietà R_1 e S_2 in un dominio commutativo A. Tali proprietà sono utilizzate nei numeri successivi quando si particolarizza A con un anello graduato R ($R=$ anello delle coordinate omogenee di una varietà proiettiva $X = \operatorname{Proj} R$). Le prime applicazioni si trovano già nel §2, in cui non viene ancora introdotto l'anello S: si mostra, tra l'altro, che $\overline{R}$ induce su $R^{(1)}$ una struttura di anello graduato (prop. 2.5).

Le due uguaglianze $R = S$ e $S = R^{(1)}$ vengono caratterizzate nel §3 mediante le condizioni rispettive: X è una varietà di I specie nel senso di Dubreil (prop. 3.2), X è S_2 (teor. 3.6); ne segue immediatamente (cor. 3.7) una caratterizzazione delle varietà X che sono proiettivamente S_2. Tutte le caratterizzazioni precedenti possono anche essere espresse mediante condizioni sui primi associati agli ideali principali di R.

Nel §4 si mostra come si possano costruire varietà proiettive X che non sono S_2 oppure sono di II specie. Se ne deduce l'esempio menzionato di un anello R per cui tutte le inclusioni (*) sono strette.

Nel §5 le condizioni " X è di I oppure di II specie" e " X è S_2 oppure proiettivamente S_2" vengono caratterizzate mediante proprietà "del tipo Bertini" relative al generico elemento omogeneo di R e ai divisori primi di X (teor. 5.6 e cor. 5.7).

Infine nel §6 si dà un'interpretazione geometrica di certe proprietà dell'anello $R^{(1)}$ in termini di sistemi lineari di divisori di X e si introduce una nozione di equivalenza che è diversa da quella classica di equivalenza lineare quando la varietà X non è S_2.

1 – Preliminari

Questo numero è dedicato ad una esposizione di alcune note proprietà relative alle cosiddette "condizioni di normalità" di Serre R_1 ed S_2 per un anello A; si è fatto riferimento soprattutto ai testi [6], [12], ed all'articolo [14] per gli opportuni riferimenti bibliografici.

Sia A un anello commutativo unitario e noetheriano. Si dice che A soddisfa la condizione R_1 se $A_\mathfrak{p}$ è un anello locale regolare per ogni ideale primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ di altezza $\operatorname{ht}\mathfrak{p} = 1$. Si dice che A soddisfa la condizione S_2 se $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{ht}\mathfrak{p} \geq 2 \implies \operatorname{prof} A_\mathfrak{p} \geq 2$. In generale, si dice che A soddisfa la condizione R_1 (risp. S_2) nel primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ se l'anello locale $A_\mathfrak{p}$ soddisfa R_1 (risp. S_2).

In questo lavoro si suppone che l'anello A sia anche integro.

LEMMA 1.1. *Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo non nullo di A. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

a) $\operatorname{prof} A_\mathfrak{p} = 1$;

b) *$\mathfrak{p}$ è primo associato di qualche ideale principale (f), con $f \in \mathfrak{p}$ (i.e. $\mathfrak{p} = (f) : (g)$, per qualche $g \in A$);*

c) *$\mathfrak{p}$ è associato ad ogni ideale principale $(f) \subseteq \mathfrak{p}$.*

DIM. Cfr. [6], cor. 3.25. □

Ne segue immediatamente la nota caratterizzazione:

COROLLARIO 1.2. *L'anello A soddisfa S_2 se e solo se ogni ideale principale di A è puro (cioè privo di componenti immerse).*

La caratterizzazione 1.2 consente di definire la proprietà S_2 per un dominio. A non necessariamente noetheriano: A soddisfa S_2 se, per ogni elemento non nullo e non invertibile $b \in A$, l'ideale bA è intersezione di ideali primari di altezza 1 (cfr. [14], def. 5.8). Questa definizione sarà utilizzata per l'anello $A^{(1)}$ introdotto nel seguito.

Dal Lemma 1.1 discende anche la seguente proposizione utilizzata nei paragrafi successivi. Si pone:

$$\mathcal{P} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \operatorname{prof} A_{\mathfrak{p}} = 1\} ,$$

$$\mathcal{P}' = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}\} ,$$

essendo $\mathfrak{m}$ un fissato ideale di A.

PROPOSIZIONE 1.3. *a)* $A = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}} A_{\mathfrak{p}}$; *b) se* $\mathfrak{m}$ *è un ideale massimale di* A, *si ha* $\operatorname{prof} A_{\mathfrak{m}} \geq 2$ *se e solo se* $A = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}'} A_{\mathfrak{p}}$.

DIM. a) Cfr. [6], 3.43. b) Se $\operatorname{prof} A_{\mathfrak{m}} \geq 2$, si ha $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ e quindi, in virtù di a), $A \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}'} A_{\mathfrak{p}} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}} A_{\mathfrak{p}} = A$. Viceversa, se $\operatorname{prof} A_{\mathfrak{m}} = 1$, si può porre $\mathfrak{m} = (a) : (b)$ (a norma di 1.1 (b)); allora $b/a \notin A$ e $b/a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}} A_{\mathfrak{p}}$ ($b/a \in A_{\mathfrak{p}}$ se e solo se esiste $y \notin \mathfrak{p}$ tale che $by \in (a)$, ossia $\mathfrak{p} \not\supseteq (a) : (b) = \mathfrak{m}$). □

Posto

$$\mathcal{T} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1\} ,$$

$$A^{(1)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{T}} A_{\mathfrak{p}} ,$$

risulta: $A \subseteq A^{(1)} \subseteq F =$ campo dei quozienti di A.

PROPOSIZIONE 1.4. *L'anello* A *soddisfa* S_2 *se e solo se* $A = A^{(1)}$.

DIM. Cfr [6], 3.44. □

Posto inoltre

$$\mathcal{P}^{(1)} = \Big\{P \in \operatorname{Spec} A^{(1)} : P \text{ è primo associato di qualche ideale principale di } A^{(1)}\Big\} ,$$

$$\mathcal{T}^{(1)} = \Big\{P \in \operatorname{Spec} A^{(1)} : \operatorname{ht} P = 1\Big\} ,$$

in accordo con le notazioni introdotte in precedenza a proposito di A, si ha:

PROPOSIZIONE 1.5.

a) *Il morfismo naturale* $\operatorname{Spec} A^{(1)} \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ *induce una applicazione biunivoca* $\delta\colon \mathcal{P}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{T}$ $(\delta(P) = P \cap A,\ \delta^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cap A^{(1)})$.

b) $\mathfrak{p} = \delta(P)$ *se e solo se* $A_{\mathfrak{p}} = A^{(1)}_P$.

c) $\mathcal{P}^{(1)} = \mathcal{T}^{(1)}$ *ed* $A^{(1)}$ *soddisfa* S_2.

DIM. Cfr. [14], dim. di 5.6 (2) e cor. 5.9 (1). □

Diciamo I l'insieme degli ideali primi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ che sono primi immersi di ideali principali di $A(I = \mathcal{P} - \mathcal{T})$, ed indichiamo come d'uso con $\overline{A}$ la chiusura integrale di A in F.

LEMMA 1.6. *Considerate le seguenti condizioni:*

(i) I *è finito;*

(ii) $A^{(1)} \subseteq A_b$ *per qualche* $b \in A - \{0\}$*;*

(iii) $(A\colon A^{(1)}) \neq 0$*;*

(iv) $A^{(1)}$ *è un* A*-modulo di tipo finito;*

(v) $A^{(1)} \subseteq \overline{A}$*;*

(vi) *per ogni* $P \in \operatorname{Spec} \overline{A}$ *di* $\operatorname{ht} P = 1$ *si ha* $\operatorname{ht} P \cap A = 1$*;*
sussistono le implicazioni:

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)} \Leftarrow \text{(iii)} \Leftrightarrow \text{(iv)} \Rightarrow \text{(v)} \Leftrightarrow \text{(vi)}.$$

Inoltre, se $\overline{A}$ *è un* A*-modulo di tipo finito, allora* v) $\Rightarrow$ iv).

DIM. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) cfr. [14], 5.15 (8). (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Se $b \neq 0$ è un elemento di $(A\colon A^{(1)})$, si ha $A^{(1)} \subseteq b^{-1}A \subseteq A_b$. (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Se $A^{(1)} \subseteq b^{-1}A$, $A^{(1)}$ è finitamente generato perché A è noetheriano. Viceversa, se $A^{(1)}$ è generato da $b^{-1}x_1, \dots, b^{-1}x_n$, $x_i \in A$, $b \in A - \{0\}$, allora $b \in (A\colon A^{(1)})$. (iv) $\Rightarrow$ (v) è immediata. (v) $\Leftrightarrow$ (vi) cfr. [14], 5.7 (1). Infine, se $\overline{A}$ è di tipo finito, (v) $\Rightarrow$ (iv) perché A è noetheriano. □

Poniamo ora

$$Z = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A : A_\mathfrak{q} \text{ non soddisfa } S_2\} .$$

Si ha allora: $Z = \bigcup_{\mathfrak{p} \in I} V(\mathfrak{p})$ (se I è un insieme finito questa unione è un chiuso di Zariski, non lo è a priori se I è infinito).

PROPOSIZIONE 1.7. *Se vale* (v) *di* 1.6, *allora il morfismo*

$$g\colon \operatorname{Spec} A^{(1)} \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

si restringe ad un isomorfismo

$$g'\colon \operatorname{Spec} A^{(1)} - g^{-1}(Z) \longrightarrow \operatorname{Spec} A - Z .$$

DIM. Poiché $A^{(1)}$ è intero su A, g è suriettivo ([12], th. 5) e tale è g'. Se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A - Z$, $A_\mathfrak{p}$ soddisfa S_2 e allora ([14], cor. 5.9 (2)) $A_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}^{(1)}((A_\mathfrak{p})^{(1)} = (A^{(1)})_\mathfrak{p})$, onde esiste un unico primo P di $A^{(1)}$ sopra $\mathfrak{p}$ ([12], th. 5, w). Perciò g' è iniettivo e il massimale di $A_\mathfrak{p}^{(1)}$ è $PA_\mathfrak{p}^{(1)}$, da cui $A_P^{(1)} = A_\mathfrak{p}^{(1)} = A_\mathfrak{p}$. $\square$

Terminiamo con alcune applicazioni di 1.5 e 1.6 riguardanti la proprietà R_1.

PROPOSIZIONE 1.8. *Si ha* $A^{(1)} = \overline{A}$ *se e solo se* $A^{(1)} \subseteq \overline{A}$ *ed* A *soddisfa* R_1.

DIM. Se $A^{(1)} = \overline{A}$ e $\mathfrak{p} \in \mathcal{T}$, $P = \delta^{-1}(\mathfrak{p})$, si ha (1.5 (b)) $A_\mathfrak{p} = A_P^{(1)} = \overline{A}_P$ ed $\overline{A}_P$ è un D.V.R. Viceversa, se A è R_1 e $\mathfrak{p} \in \mathcal{T}$, $A_\mathfrak{p}$ è un D.V.R., quindi $\overline{A} \subseteq \overline{(A_\mathfrak{p})} = A_\mathfrak{p}$, onde $\overline{A} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{T}} A_\mathfrak{p} = A^{(1)} \subseteq \overline{A}$. $\square$

PROPOSIZIONE 1.9. *Se* A *è una algebra di tipo finito sopra un campo* K, *tutte le condizioni di* 1.6 *sono verificate e si ha* $A^{(1)} = \overline{A}$ *se e solo se* A *è* R_1.

DIM. La condizione (vi) di 1.6 è verificata ([12], th. 23 e cor. 3 del th. 24) e inoltre $\overline{A}$ è di tipo finito su A (cfr., ad es., [2], cap. 5, §3, n.2, th. 2); ciò, a norma di 1.6, prova il primo asserto; il secondo segue allora subito da 1.8. □

2 – Il caso graduato

Sia $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ un anello graduato, noetheriano, integro, e sia $\mathfrak{m} = \bigoplus_{n \geq 1} R_n$. Sia I definito come nel §1.

LEMMA 2.1. a) *Se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo non omogeneo di R con* $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \geq 2$ *allora* $\operatorname{prof} R_{\mathfrak{p}} \geq 2$.

b) *R è S_2 se e solo se per ogni ideale primo omogeneo $\mathfrak{p}$ si ha* $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \geq 2 \Longrightarrow \operatorname{prof} R_{\mathfrak{p}} \geq 2$.

c) *I primi $\mathfrak{p} \in I$ sono omogenei.*

DIM. a) cfr. [7], cor. 1.1.3. Da a) segue immediatamente b) ed anche c), ricordando il Lemma 1.1. □

Sia ora T un sottoinsieme moltiplicativo di R costituito da elementi omogenei. Allora l'anello $T^{-1}R$ è graduato in modo naturale su $\mathbb{Z}$ e, se $\mathfrak{a}$ è un ideale omogeneo di R, l'ideale $T^{-1}\mathfrak{a}$ è omogeneo. Quando T è l'insieme di tutti gli elementi omogenei di $R - \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R$ un primo omogeneo, ovvero quando T è l'insieme delle potenze f^k, $k \geq 0$, di un elemento omogeneo $f \in R_n$, $n > 0$, useremo talvolta le notazioni $R_{(\mathfrak{p})}$ e $\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}$, ovvero $R_{(f)}$ ed $\mathfrak{a}_{(f)}$, invece di $(T^{-1}R)_0$ e $(T^{-1}\mathfrak{a})_0$.

LEMMA 2.2. *Posto $A = (T^{-1}R)_0$, risulta:*

a) *$\mathfrak{a}T^{-1}R \cap A = \mathfrak{a}$ se $\mathfrak{a}$ è un ideale di A;*

b) *per ogni $Q \in \operatorname{Spec} A$ esiste $\mathfrak{q} \in \operatorname{Proj} R$ tale che $\mathfrak{q} \cap T = \emptyset$ e $Q = (T^{-1}\mathfrak{q})_0$, e si ha $A_Q = R_{(\mathfrak{q})}$;*

c) *per ogni $\mathfrak{q} \in \operatorname{Proj} R$ tale che $\mathfrak{q} \cap T = \emptyset$ allora $Q = (T^{-1}\mathfrak{q})_0 \in \operatorname{Spec} A$, e se $T \cap R_1 \neq \emptyset$ allora $\operatorname{ht} \mathfrak{q} = \operatorname{ht} Q$.*

DIM. a) Sia $x = \Sigma a_i b_i$, con $a_i \in \mathfrak{a}$, $b_i \in T^{-1}R$, un elemento di $\mathfrak{a}T^{-1}R$. Se $x \in A$, cioè ha grado 0, si possono sostituire i vari b_i con le rispettive componenti di grado 0, onde $x \in \mathfrak{a}$. b) Se $Q \in \operatorname{Spec} A$, in virtù di a) e di [1], 3.16, risulta $Q = T^{-1}\mathfrak{q} \cap A$ per qualche $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$ con $\mathfrak{q} \cap T = \emptyset$. Sostituendo $\mathfrak{q}$ con l'ideale primo $\mathfrak{q}^*$ generato dagli elementi omogenei di $\mathfrak{q}$ si ha il primo asserto. Il secondo è immediato. c) Si ha $Q = (T^{-1}\mathfrak{q})_0 = T^{-1}\mathfrak{q} \cap A$, quindi Q è primo in A. Sia ora $s \in R_1 \cap T$. Allora $x \in \mathfrak{q} \cap R_n$ se e solo se $x/s^n \in (T^{-1}\mathfrak{q})_0$. Da questo segue immediatamente che $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{q}$ se e solo se $(T^{-1}\mathfrak{p})_0 \subsetneqq (T^{-1}\mathfrak{q})_0$, da cui l'asserto. □

LEMMA 2.3. *Se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R$ e $x \in R_1 - \mathfrak{p}$, allora:*
a) *x è trascendente su $R_{(\mathfrak{p})}$;*
b) *posto $A = R_{(x)}$ e $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_{(x)}$, onde $R_{(\mathfrak{p})} = A_{\mathfrak{q}}$, risulta $R_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{q}}[x^{-1}]_{\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}[x^{-1}]}$.*

DIM. a) Cfr. [19], p. 157. b) Si ha $R_{\mathfrak{p}} = (R_x)_{\mathfrak{p}R_x}$, $R_x = A[x^{-1}]$, $\mathfrak{p}R_x = \mathfrak{q}R_x = \mathfrak{q}A[x^{-1}]$, d'onde l'asserto. □

PROPOSIZIONE 2.4. *Sia $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R$ tale che $R_1 - \mathfrak{p} \neq \emptyset$. Allora:*
a) *$\operatorname{prof} R_{\mathfrak{p}} = \operatorname{prof} R_{(\mathfrak{p})}$;*
b) *$R_{\mathfrak{p}}$ è S_2 se e solo se $R_{(\mathfrak{p})}$ è S_2.*

DIM. a) In virtù del lemma 2.3, si tratta di provare che se A è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{n}$ e x è una indeterminata su A, posto $B = A[x]_{\mathfrak{n}A[x]}$, si ha $\operatorname{prof} A = \operatorname{prof} B$ e questo segue da [12], th. 21. c (osservando che $B/\mathfrak{n}B$ è il campo $(A/\mathfrak{n})(x)$). b) Segue dai lemmi 2.1, 2.2 e da a). □

Ricordiamo (cfr. [19], ch. VII, thm. 11, oppure [2], ch. V, §1, prop. 2.1) che, se R è un anello graduato, la chiusura integrale $\overline{R}$ di R nel suo campo F delle frazioni è un anello graduato (anche se R è generato dagli elementi omogenei di grado 1, non necessariamente lo stesso vale per $\overline{R}$). Proviamo ora che se $R^{(1)}$ è un R-modulo di tipo finito allora $R^{(1)}$ è anch'esso graduato con una graduazione indotta da $\overline{R}$ (questa proprietà sarà utilizzata nel §6).

PROPOSIZIONE 2.5. *Se $R^{(1)}$ è un R-modulo di tipo finito, allora:*

a) *per ogni primo* $\mathfrak{p}$ *di altezza 1 in* R *si può determinare un elemento omogeneo* $g \in R - \mathfrak{p}$ *tale che* $gR^{(1)} \subseteq R$;

b) *si ha* $R^{(1)} \subseteq \overline{R}$ *e la graduazione di* $\overline{R}$ *induce su* $R^{(1)}$ *una struttura di anello graduato.*

DIM. a) L'ideale $\bigcap_{\mathfrak{q} \in I} \mathfrak{q}$ è omogeneo (lemma 2.1 (c)) e non è contenuto in $\mathfrak{p}$, poiché ogni $\mathfrak{q} \in I$ ha altezza ≥ 2. Se $h \in \bigcap_{\mathfrak{q} \in I} \mathfrak{q}$ è tale che $h \notin \mathfrak{p}$, l'anello R_h è S_2 (se $P' = \mathfrak{p}' R_h$ con $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} R$, $h \notin \mathfrak{p}'$ e $\operatorname{ht} P' = \operatorname{ht} \mathfrak{p}' \geq 2$, si ha $\operatorname{prof}(R_h)_{P'} = \operatorname{prof} R_{\mathfrak{p}'} \geq 2$, altrimenti $\mathfrak{p}' \in I$ e $h \in \mathfrak{p}'$). Si ha allora $R_h = (R_h)^{(1)} = (R^{(1)})_h$ (per la seconda uguaglianza cfr. [14], cor. 5.9 (2)). Ne segue $R^{(1)} \subseteq R_h$ e quindi, poiché $R^{(1)}$ è un R-modulo finitamente generato risulta $h^r R^{(1)} \subseteq R$ per qualche $r > 0$. Basta allora prendere h omogeneo e $g = h^r$.

b) Ogni elemento $x \in R^{(1)}$ si scrive in modo unico nella forma $x = \Sigma x_i$, x_i elemento omogeneo di $\overline{R}$ di grado i. Si tratta allora di provare che $x_i \in R^{(1)}$ per ogni i. Per ogni $\mathfrak{p}$ di altezza 1 sia g come in a). Allora $gx = \Sigma g x_i \in R$ onde, poiché l'inclusione $R \longrightarrow \overline{R}$ è un morfismo di algebre graduate, si ha $gx \in R$ per ogni i, dunque $x_i \in R_{\mathfrak{p}}$ per ogni $\mathfrak{p}$ di altezza 1, cioé $x \in R^{(1)}$. □

Siano $X = \operatorname{Proj} R$ e $C = \operatorname{Spec} R$ (cono affine di X) e poniamo, in accordo con le notazioni del §1:

$$Z(C) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \colon R_{\mathfrak{p}} \text{ non soddisfa } S_2\} ,$$

$$Z(X) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R \colon R_{(\mathfrak{p})} \text{ non soddisfa } S_2\} .$$

Supporremo d'ora in poi che $R_0 = K$ *sia un campo e che l'anello graduato* R *sia finitamente generato da* R_1 *come* R_0*-algebra* (scriveremo $R = R_0[R_1]$).

PROPOSIZIONE 2.6. *L'insieme* $Z(C)$ *coincide con il cono affine su* $Z(X)$ *privato, eventualmente, del vertice* $\mathfrak{m} \in C$.

DIM. Discende immediatamente dal lemma 2.1 (b) e dalla proposizione 2.4 (b), tenendo conto del fatto che nella ipotesi $R = R_0[R_1]$ risulta $R_1 - \mathfrak{p} \neq \emptyset$ per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R - \{\mathfrak{m}\}$. □

Terminiamo questo § con una interpretazione geometrica dell'uguaglianza $R^{(1)} = \overline{R}$.

PROPOSIZIONE 2.7. *Risulta* $R^{(1)} = \overline{R}$ *se e solo se* X *è regolare in codimensione 1.*

DIM. Segue dalla proposizione 1.9 e dal fatto che X è regolare in codimensione 1 se e solo se il cono affine C di X è regolare in codimensione 1, ovvero R soddisfa R_1 (cfr. [9], thm 1 e thm 2.c). □

3 – La successione $R \subseteq S \subseteq R^{(1)} \subseteq \overline{R}$

Sia $X = \operatorname{Proj} R$ una varietà proiettiva, $R = R_0[R_1]$ con $R_0 = K$ un campo.

Consideriamo l'anello

$$S = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R - \{\mathfrak{m}\}} R_{\mathfrak{p}} = \Gamma(C - \{\mathfrak{m}\}, \mathcal{O}_C),$$

che risulta una K-algebra graduata (cfr. [11], ch. V, §5, prop. 14).

Se $\operatorname{ht} \mathfrak{m} \geq 2$, si hanno le inclusioni:

$$R \subseteq S \subseteq R^{(1)} \subseteq \overline{R}.$$

La proposizione 1.3, applicata all'anello graduato R ed al suo massimale irrilevante $\mathfrak{m}$, *che supponiamo da ora in poi di altezza* ≥ 2, fornisce subito una caratterizzazione delle varietà proiettive cosiddette di I specie (o anche 1 volta di I specie) secondo la seguente definizione, introdotta da Dubreil in [3] (si veda anche oss. 6.2 (a)):

DEFINIZIONE 3.1. *Una varietà* $X = \operatorname{Proj} R$ *si dice di I specie se* $\operatorname{prof} R_{\mathfrak{m}} \geq 2$ *o equivalentemente* (lemma 1.1) *se nessun ideale principale di* R *ha il massimale* $\mathfrak{m}$ *come primo associato. Nel caso contrario* X *si dice di II specie.*

PROPOSIZIONE 3.2. $X = \operatorname{Proj} R$ *è di I specie se e solo se* $R = S$.

OSSERVAZIONE 3.3. È ben noto che l'esempio più semplice di varietà di II specie è la quartica razionale di $\mathbb{P}^3$ di equazioni $x_0 = \lambda^4$, $x_1 = \lambda^3\mu$, $x_2 = \lambda\mu^3$, $x_3 = \mu^4$ (cfr. anche §4, prop. 4.3).

Ricordiamo che la varietà $X = \operatorname{Proj} R$ risulta *normale* (i.e. $R_{(\mathfrak{p})}$ è normale per ogni $\mathfrak{p} \in X$) se e solo se $S = \overline{R}$ (cfr. [11], ch. V, §5). Da ciò e da 3.2 segue che X è *proiettivamente normale* (i.e. $R = \overline{R}$) se e solo se è normale e di I specie. In questo numero si danno analoghe caratterizzazioni per le varietà S_2 e proiettivamente S_2. Ricordiamo innanzitutto la seguente:

DEFINIZIONE 3.4. *La varietà X si dice S_2 se l'anello locale $R_{(\mathfrak{p})}$ è S_2 per ogni $\mathfrak{p} \in X$, si dice proiettivamente S_2 se l'anello R stesso è S_2.*

La seguente proposizione fornisce alcune proprietà relative al confronto di S con R ed $R^{(1)}$.

PROPOSIZIONE 3.5. a) *Il conduttore $\mathfrak{b}$ di S in R contiene l'ideale $\bigoplus_{n\geq n_0} R_n$ per un opportuno n_0.*
b) *Il morfismo* $\operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ *è biunivoco e si restringe ad un isomorfismo* $\operatorname{Spec} S - \{M\} \longrightarrow \operatorname{Spec} R - \{\mathfrak{m}\}$, *dove M è il massimale omogeneo di S.*
c) $R^{(1)} = S^{(1)}$.

DIM. a) Poiché $\mathfrak{b}$ è il più grande ideale di S contenuto in R, l'asserto segue dal fatto che esiste un intero n_0 tale che $R_n = S_n$ per $n \geq n_0$ (cfr. [11], p. 144, prop. 15), onde $\bigoplus_{n\geq n_0} R_n$ è ideale sia in R sia in S, quindi è contenuto in $\mathfrak{b}$. b) Un ideale primo di S giacente sopra $\mathfrak{m}$ contiene certamente l'ideale $\bigoplus_{n\geq n_0} S_n$ e quindi anche il suo radicale $M = \bigoplus_{n\geq 1} S_n$. Inoltre, se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, si ha $R_\mathfrak{p} = S_\mathfrak{p}$ se e solo se $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{p}$ (cfr. [13], lemma 1) e in tal caso esiste un unico primo P di S tale che $P \cap R = \mathfrak{p}$ (cfr. [12], th. 5) e risulta $R_\mathfrak{p} = (S_\mathfrak{p})_{PS_\mathfrak{p}} = S_P$. L'asserto segue allora dal fatto che $\mathfrak{m}$ è l'unico primo contenente $\mathfrak{b}$, in virtù di a). c) Poiché $\operatorname{ht} M > 1$ (essendo $\operatorname{ht} \mathfrak{m} > 1$), in virtù di b) risulta $S^{(1)} = \bigcap_{\operatorname{ht} P=1} S_P = \bigcap_{\operatorname{ht} \mathfrak{p}=1} R_\mathfrak{p} = R^{(1)}$. $\square$

TEOREMA 3.6. *Sono condizioni equivalenti:*
a) *X è S_2;*

b) $S = R^{(1)}$;

c) $I \subseteq \{\mathfrak{m}\}$, *vale a dire ogni ideale principale di* R *è puro oppure ha* $\mathfrak{m}$ *come unico primo immerso.*

DIM. a) $\Longrightarrow$ b). Se X soddisfa S_2, per ogni $\mathfrak{p} \in X$ tale che $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \geq 2$ risulta $\operatorname{prof} R_{(\mathfrak{p})} = \operatorname{prof} R_{\mathfrak{p}} \geq 2$ (2.4 (a)). Se $\mathfrak{p}$ non è omogeneo e $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \geq 2$ si ha pure $\operatorname{prof} R_{\mathfrak{p}} \geq 2$ (2.1 (a)). Da 2.8 (b) segue allora che $\operatorname{prof} S_P \geq 2$ per ogni $P \in \operatorname{Spec} S - \{M\}$ tale che $\operatorname{ht} P \geq 2$. Si ha inoltre $\operatorname{prof} S_M \geq 2$ in virtù di 1.3, essendo $S = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}} R_{\mathfrak{p}} = \bigcap\limits_{P \neq M} S_P$ (3.5 (b)). L'anello S è dunque S_2 e quindi $S = S^{(1)} = R^{(1)}$ (3.5 (c)) da cui l'asserto.

b) $\Longrightarrow$ a) Se $S = R^{(1)} = S^{(1)}$, l'anello S soddisfa S_2 e quindi S_P è S_2 per ogni $P \in \operatorname{Spec} S$. Da 3.5 (b) segue che $R_{\mathfrak{p}}$ è S_2 per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R$ e da 2.4 (b) segue che $R_{(\mathfrak{p})}$ è S_2 ovvero X è S_2.

a) $\Longrightarrow$ c) Per assurdo, sia f un elemento di R avente un primo $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ immerso, di $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \geq 2$ e $\operatorname{prof} R_{\mathfrak{p}} = 1$ (1.1). Allora $\mathfrak{p}$ è omogeneo per 2.1 (a). Inoltre $R_{\mathfrak{p}}$ non è S_2 e quindi $R_{(\mathfrak{p})}$ non è S_2 (2.4 (b)), contraddizione.

c) $\Longrightarrow$ a) Per assurdo, se X non è S_2 allora (2.4 (b)) esistono $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} R$ e un primo omogeneo $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ tale che $\operatorname{ht} \mathfrak{q} \geq 2$ e $\operatorname{prof} R_{\mathfrak{q}} = 1$. Allora $\mathfrak{q}$ è un primo associato di ogni ideale principale in esso contenuto (1.1), quindi esiste un ideale principale avente un primo immerso non irrilevante, contro l'ipotesi. □

COROLLARIO 3.7. *X è proiettivamente S_2 se e solo se è S_2 e di I specie.*

DIM. $R = R^{(1)}$ se e solo se $R = S$ e $S = R^{(1)}$, quindi l'asserto segue subito da 3.2 e da 3.6, a)$\Leftrightarrow$ b). □

4 – Un esempio in cui $R \subsetneq S \subsetneq R^{(1)} \subsetneq \overline{R}$

Si mostra qui come a partire dalla nozione di anello ottenuto per "incollamento" di ideali primi (definita in [13]) si possano costruire varietà proiettive che non soddisfano S_2 e si indica inoltre un procedimento per ottenere varietà proiettive di II specie a partire da una qualsiasi varietà X attraverso una opportuna proiezione isomorfa della immersione $X^{(d)}$ di X, per d sufficientemente grande.

Sia $Y = \operatorname{Proj} B$ una varietà proiettiva, B una algebra graduata finitamente generata sul campo $K = B_0$. Siano y_1 e y_2 due punti chiusi di Y e siano $\mathfrak{p}_1$ e $\mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Proj} B$ gli ideali primi (omogenei) corrispondenti. Sia inoltre $\varphi\colon B/\mathfrak{p}_1 \longrightarrow B/\mathfrak{p}_2$ un isomorfismo di algebre graduate tale che $\varphi(\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1)=\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_2$ e il morfismo indotto $\overline{\varphi}\colon B/\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2 \longrightarrow B/\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2$ sia l'identità (si ha $B/\mathfrak{p}_1 \cong K[t]$ e $B/\mathfrak{p}_2 \cong K[u]$, onde si può prendere φ definito da $\varphi(t) = u$).

Sia A *l'anello ottenuto da* B *incollando* $\mathfrak{p}_1$ *e* $\mathfrak{p}_2$ *mediante* φ, ovvero $A = \{f \in B : \varphi(f \bmod \mathfrak{p}_1) = f \bmod \mathfrak{p}_2\}$, e sia $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1 \cap A = \mathfrak{p}_2 \cap A$ (cfr. [13], p. 45). In virtù di [13], teor. 1 e cor. seguente, B è un A-modulo di tipo finito (onde $\dim A = \dim B$) e A è una K-algebra finitamente generata; inoltre $A/\mathfrak{p}' \cong B/\mathfrak{p}_1 \cong B/\mathfrak{p}_2$ (cfr. [13], prop. 7) d'onde $\operatorname{ht} \mathfrak{p}' = \operatorname{ht} \mathfrak{p}_1 (= \dim A - 1)$.

L'anello A *risulta una sottoalgebra graduata di* B *e l'ideale* $\mathfrak{p}'$ *è omogeneo*: la varietà proiettiva $Z = \operatorname{Proj} A$ si dice ottenuta da Y identificando y_1 e y_2. Il morfismo $\rho\colon Y \longrightarrow Z$ indotto dall'inclusione $A \subseteq B$ è ben definito (se P è un primo omogeneo di B tale che $P \cap A = A_+$, si ha $\dim B/P = \dim A/P \cap A = \dim A/A_+ = 0$, onde $P = B_+$) e l'ideale $\mathfrak{p}'$ individua un punto chiuso z di Z tale che $\rho(y_1) = \rho(y_2) = z$.

LEMMA 4.1. *Il morfismo suriettivo* $\rho\colon Y \longrightarrow Z$ *si restringe ad un isomorfismo* $\rho'\colon Y - \{y_1, y_2\} \longrightarrow Z - \{z\}$.

DIM. Poiché $\mathfrak{p}'$ è il conduttore di A in B ([13], lemma 5) allora per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} B$ tale che $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{p}'$, posto $P = \mathfrak{p} \cap A$, si ha $A_P = B_P = B_{\mathfrak{p}}$ ([13], lemma 1); ne segue che $\mathfrak{p}$ è l'unico primo giacente su P, e quindi ρ' è iniettivo e $B_{(\mathfrak{p})} = A_{(P)}$, ossia ρ' è un isomorfismo. □

PROPOSIZIONE 4.2. *Se* $\dim Y \geq 2$, *la varietà* Z *non soddisfa* S_2.

DIM. Sia $b \in A - \mathfrak{p}'$ un elemento omogeneo e siano $B' = B_{(b)}$ e $A' = A_{(b)}$. Allora $U = \operatorname{Spec} B'$ è un aperto affine di Y contenente y_1 e y_2, e $\rho(U) = \operatorname{Spec} A'$ è un aperto affine di Z contenente z.

Sia ora ψ una funzione regolare su U tale che $\psi(y_1) \neq \psi(y_2)$. Tramite l'isomorfismo ρ' resta indotta una funzione razionale ψ' su Z definita su $\rho(U) - \{z\}$ e tale che $\psi' \circ \rho = \psi$ su $U - \{y_1, y_2\}$. La funzione ψ' non è estendibile a z perché altrimenti la funzione composta $\psi' \circ \rho$ sarebbe definita su U e coinciderebbe con ψ, da cui $\psi(y_1) = \psi(y_2) = \psi'(z)$, assurdo.

Detto M l'ideale massimale di A' corrispondente al punto z, risulta allora $A' \subsetneqq \bigcap_{P \in \operatorname{Spec} A' - \{m\}} A'_P$ onde (1.3) $\operatorname{prof} A'_M = \operatorname{prof} O_{Z,z} = \operatorname{prof} A_{(\mathfrak{p}')} = 1$ mentre $\dim A_{(\mathfrak{p}')} \geq 2(\dim Z \geq 2)$, quindi Z non è S_2. □

Una immersione della varietà proiettiva $Z = \operatorname{Proj} A$ si costruisce come segue. Posto $R = A^{(d)} = \bigoplus_{k \geq 0} A_{kd}$ e $X = \operatorname{Proj} R$, si ha $X \cong Z$ ([2], ch.III, §1, prop. 6), dunque anche X non soddisfa S_2. Inoltre l'anello R risulta generato dai suoi elementi di grado 1 per $d \gg 0$ ([2], ch. III, §1, lemma 2), così che X si immerge come sottovarietà dello spazio proiettivo $\operatorname{Proj} \operatorname{Sym} R_1$. Per tale X si ha dunque (3.1) $S \subsetneqq R^{(1)}$.

La successiva proposizione 4.3 mostra come ogni varietà proiettiva X è isomorfa ad una varietà di II specie.

Sia $X = \operatorname{Proj} R \subset \mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} \operatorname{Sym} R_1$, dove $R = R_0[R_1]$, e sia $X^{(d)} = \operatorname{Proj} R^{(d)}$, $R^{(d)} = \bigoplus_{k \geq 0} R_{kd} = R_0[R_d]$, la d-uple embedding di Veronese di X (determinata dal sistema lineare secato su X dalle ipersuperfici di grado d di $\mathbb{P}^n$) immersa in $\mathbb{P}^N = \operatorname{Proj} \operatorname{Sym} R_d$. Denotiamo con S o più precisamente con $S(R)$ (per evitare ambiguità) l'anello $S = \bigcap_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}} R_{\mathfrak{p}}$.

PROPOSIZIONE 4.3. *Per ogni varietà proiettiva* X $(\dim X \geq 1)$ *e per ogni* $d \gg 0$ *esiste una proiezione* $X' = \operatorname{Proj} R'$ *di* $X^{(d)}$ *tale che:*

i) X' *è isomorfa a* X;

ii) $R' \subsetneqq R^{(d)} \subseteq S(R^{(d)}) = S(R')$, *onde* X' *è di II specie.*

DIM. i) Sia $x_0, \ldots, x_n$ una base di R_1 e sia A_d il sottospazio vettoriale di R_d generato dai monomi $x_i x_j^{d-1}$. Risulta $\dim A_d \leq (n+1)^2$ onde $\dim R_d > \dim A_d$ per $d \geq d_0$ con d_0 opportuno. Posto $X' = \operatorname{Proj} R_0[A_d]$ risulta $X' \subset \mathbb{P}^{N'} = \operatorname{Proj} \operatorname{Sym} A_d$, dove $N' < N$ se $d \geq d_0$, e la proiezione $\pi \colon \mathbb{P}^N \longrightarrow \mathbb{P}^{N'}$ induce l'isomorfismo $\rho \colon X^{(d)} \longrightarrow X'$ associato all'inclusione $R_0[A_d] \hookrightarrow R_0[R_d]$, che risulta un isomorfismo: infatti sugli aperti $D(x_i^d)$ si ha

$$(*) \qquad x_k/x_i = x_k x_i^{d-1}/x_i^d .$$

Questo prova l'asserto.

ii) L'inclusione stretta $R' = R_0[A_d] \subsetneqq R^{(d)}$ segue da quanto visto in i). Proviamo ora che $S(R^{(d)}) = S(R')$. Risulta infatti:

$$S(R^{(d)}) = \bigcap R^{(d)}_{x_i^d} = \bigcap R^{(d)}_{(x_i^d)}[x_i^d]_{x_i^d},$$

$$S(R') = \bigcap R'_{x_i^d} = \bigcap R'_{(x_i^d)}[x_i^d]_{x_i^d},$$

dove in virtù di (*) si ha

$$R^{(d)}_{(x_i^d)} = R'_{(x_i^d)}.$$

□

ESEMPIO 4.4. Forniamo ora un esempio di varietà proiettiva $X = \operatorname{Proj} R$ tale che le inclusioni $R \subsetneqq S \subsetneqq R^{(1)} \subsetneqq \overline{R}$ sono tutte strette.

Sia Y una varietà proiettiva singolare in codimensione 1 con $\dim Y \geq 2$, e siano $y_1, y_2 \in Y$ due punti chiusi. Sia Z la varietà proiettiva ottenuta da Y incollando y_1 e y_2. Z non è S_2 (prop. 4.2) e rimane singolare in codimensione 1 (lemma 4.1). Posto $Z' = Z^{(d)}$ per $d \gg 0$, si può determinare una proiezione isomorfa X di Z' di II specie (prop. 4.3). Per tale varietà proiettiva X le inclusioni $R \subsetneqq S \subsetneqq R^{(1)} \subsetneqq \overline{R}$ sono tutte strette. Infatti $R^{(1)} \subsetneqq \overline{R}$ poiché X è singolare in codimensione 1 (pro. 2.7), $S \subsetneqq R^{(1)}$ perché non soddisfa S_2 (teor. 3.6), e infine $R \subsetneqq S$ perché X è di II specie (prop. 3.2).

5 – Sezioni con le ipersuperficie dello spazio

Conserviamo le notazioni e le ipotesi del paragrafo 3, supponendo inoltre che il campo base K sia *algebricamente chiuso*. Premettiamo alcuni richiami sui divisori, che verranno utilizzati poi anche nel §6, con particolare riferimento a [5].

Sia X una varietà algebrica (irriducibile, affine o proiettiva). Se r è una funzione razionale non nulla su X, per ogni sottovarietà irriducibile V di codimensione 1 in X, posto $A = \mathcal{O}_{X,V}$, si definisce (cfr. [5], ch. I, §§1.2 e 1.3) $\operatorname{ord}_V(r) = \ell_A(A/rA)$ (=lunghezza dell'A-modulo A/rA) se $R \in A$, $\operatorname{ord}_V(r) = \operatorname{ord}_V(a) - \operatorname{ord}_V(b)$ se $r = a/b$ con $a, b \in A$. Se poi D è un divisore di Cartier di X, si definisce $\operatorname{ord}_V(D) = \operatorname{ord}_V(r)$ dove r

è un'equazione locale di D su un aperto U tale che $U \cap V \neq \emptyset$. Così si associa a D il ciclo (divisore di Weil) $[D] = \Sigma \operatorname{ord}_V(D) \cdot V$.

Sia ora $X = \operatorname{Proj} R$ una varietà proiettiva, immersa canonicamente nello spazio proiettivo $\mathbb{P} = \operatorname{Proj} \operatorname{Sym} R_1$. Fissato $n \geq 1$, le ipersuperficie di grado n di $\mathbb{P}$, considerate modulo l'ideale omogeneo di X in $\mathbb{P}$, corrispondono ai punti chiusi dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^N = \operatorname{Proj} \operatorname{Sym} R_n$. Per semplicità, indicheremo con lo stesso simbolo f sia un elemento di R_n sia il corrispondente punto chiuso di $\mathbb{P}^N$.

Per ogni elemento $f \in R_n$, l'ideale omogeneo fR definisce un sottoschema chiuso $X(f)$ di X che è un divisore di Cartier effettivo di X, e l'insieme di tutti questi divisori costituisce il sistema lineare di Cartier secato su X dalle ipersuperficie di grado n di $\mathbb{P}$. Il ciclo associato a $X(f)$ è un divisore di Weil che indicheremo con $f \cdot X$. Da quanto precede risulta:

$$f \cdot X = [X(f)] = \Sigma \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(f) \cdot V(\mathfrak{p}),$$

dove si pone $\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(f) = \operatorname{ord}_{V(\mathfrak{p})}(f/x^n)$, se $x \in R_1 - \mathfrak{p}$. Ricordiamo infine che un ciclo di X si dice *primo* se ha una sola componente irriducibile contata con molteplicità 1.

LEMMA 5.1. *Il divisore $f \cdot X$ è primo se e solo se l'ideale fR ha una decomposizione primaria del tipo $fR = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}'$, dove $\mathfrak{p}$ è un primo di altezza 1 e $\mathfrak{q}'$ è intersezione di componenti primarie immerse.*

DIM. Se fR ha una decomposizione siffetta, si ha $fR_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ onde $\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(f) = 1$ e quindi $f \cdot X = V(\mathfrak{p})$; viceversa, da questa uguaglianza si trae $\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(f) = 1$ ed inoltre $fR = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}'$, dove $\mathfrak{q}$ è $\mathfrak{p}$-primario e $\mathfrak{q}'$ è intersezione di primari immersi. Risulta allora $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = fR_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}$, da cui $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ (cfr. [1], prop. 4.8). □

I due enunciati seguenti fanno entrambi riferimento a un risultato classico, sovente denominato II teorema di Bertini.

Supponiamo, d'ora in avanti, che *la varietà X abbia dimensione $d \geq 2$.*

TEOREMA 5.2. a) *(Bertini-Zariski) Sia Σ un sistema lineare su una varietà proiettiva X, privo di componenti fisse e non composto con un fascio. Allora il generico elemento di Σ è una ipersuperficie irriducibile e ridotta di X.*

b) *(Bertini-Seidenberg) Se Σ_n è il sistema lineare secato su X da tutte le ipersuperfici di grado $n \geq 1$, l'elemento generico di Σ_n è ridotto e irriducibile per ogni n.*

DIM. a) La dimostrazione data da Zariski nel caso normale (cfr. [18], p. 68) può in effetti essere estesa al caso generale (cfr. ad es. [10], ch. I, th. 6.3, e [15], §5, cor. 7). b) Cfr. [16], p. 613. □

Se $\mathfrak{q}$ è un ideale primo omogeneo di R (anche irrilevante), consideriamo il sottospazio lineare di $\mathbb{P}^N \Sigma_n(\mathfrak{q}) = \{f \in \mathbb{P}^N : f \in \mathfrak{q}\}$ e poniamo $U_n(\mathfrak{q}) = \mathbb{P}^N - \Sigma_n(\mathfrak{q})$. Ricordando che $I = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : \mathfrak{q}$ è primo immerso di qualche ideale principale di $R\}$, poniamo inoltre:

$$U_n = \{f \in \mathbb{P}^N : f \cdot X \text{ è un divisore primo}\},$$

$$U'_n = U_n \cap \left(\bigcap_{\mathfrak{q} \in I - \{\mathfrak{m}\}} U_n(\mathfrak{q}) \right).$$

PROPOSIZIONE 5.3. *Gli insiemi U_n e U'_n sono aperti non vuoti di $\mathbb{P}^N$ per ogni $n \geq 1$.*

DIM. L'insieme U_n è aperto in virtù di 5.2 (b); allora anche U'_n è aperto, in quanto I è finito (cfr. 1.6 e 1.8) e gli aperti $U_n(\mathfrak{q})$ sono non vuoti se $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{m}$. □

LEMMA 5.4. *Sia $\mathfrak{q}$ un primo omogeneo di R tale che $\operatorname{ht} \mathfrak{q} \geq 2$ e sia n_0 un intero tale che $\mathfrak{q}$ è generato dai propri elementi omogenei di grado $\leq n_0$. Allora $U_n \cap \Sigma_n(\mathfrak{q}) \neq \emptyset$ per ogni $n \geq n_0 + 1$.*

DIM. Se $n \geq n_0$ il sistema lineare $\Sigma_n(\mathfrak{q})$ ha come luogo base la sottovarietà $V(\mathfrak{q})$ di codimensione ≥ 2 in X, dunque non ha divisori fissi. Segue allora dal teor. 5.2 (a) che se, per assurdo, $U_n \cap \Sigma_n(\mathfrak{q}) = \emptyset$ allora $\Sigma_n(\mathfrak{q})$ sarebbe composto con un fascio Σ'. Ne segue che, se $x \in X - V(\mathfrak{q})$, il sistema lineare $\Sigma_n(\mathfrak{q})_x = \{f \in \Sigma(\mathfrak{q}) : f(x) = 0\}$ ha divisori fissi: infatti ogni divisore di $\Sigma(\mathfrak{q})$ passante per x contiene il divisore di Σ' passante per x. Da ciò si trae un assurdo poiché per ogni $n \geq n_0 + 1$ il sistema $\Sigma_n(\mathfrak{q})_x$ ha $V(\mathfrak{q}) \cup \{x\}$ come luogo base (se $y \notin V(\mathfrak{q}) \cup \{x\}$, presi f di grado n_0 in $\mathfrak{q}$ e g di grado $n - n_0$ tali che $(fg)(y) \neq 0$ e $g(x) = 0$, si ha $fg \in \Sigma_n(\mathfrak{q})_x$). □

TEOREMA 5.5. *Sono condizioni equivalenti:*
i) *X soddisfa S_2;*
ii) *$U_n = U'_n$ per ogni $n \geq 1$;*
iii) *$U_n = U'_n$ per ogni $n \geq N$, con N opportuno.*

DIM. i) $\Longrightarrow$ ii) segue da $I \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ (cfr. 3.6). ii) $\Longrightarrow$ iii) è ovvio. iii) $\Longrightarrow$ i) Se X non è S_2 allora esiste $\mathfrak{q} \in I - \{\mathfrak{m}\}$ (cfr. 3.6) onde dal lemma 5.4 risulta (per ogni $n \geq N$ con N opportuno) $U_n \cap \Sigma_n(\mathfrak{q}) \neq \emptyset$ e quindi esiste $f \in U_n - U_n(\mathfrak{q})$ da cui $U'_n \subsetneq U_n$ contro l'ipotesi. □

Siano ora

$$V_n = \left\{ f \in \mathbb{P}^N : fR \text{ è un ideale primo} \right\} \subseteq U'_n,$$

$$W_n = \left\{ f \in \mathbb{P}^N : fR = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}_0, \text{ dove } \mathfrak{p} \text{ è un primo di altezza 1 e } \mathfrak{q}_0 \text{ è } \mathfrak{m}\text{-primario} \right\}.$$

TEOREMA 5.6. *La varietà X è di I (risp. II) specie secondo che, per ogni $n \geq 1$, W_n (risp. V_n) è vuoto, ossia $V_n = U'_n$ (risp. $W_n = U'_n$).*

DIM. Si ha evidentemente $U'_n = V_n \cup W_n$ per ogni $n \geq 1$. Se X è di I specie, cioè $\mathfrak{m} \notin I$, si ha $W_n = \emptyset$ e $V_n = U'_n$. Se X è di II specie si ha invece $V_n = \emptyset$ e $W_n = U'_n$. □

Il Teorema 5.6, quando si tengano presenti 5.2 (b) e 5.3, può anche enunciarsi dicendo che *X è di I oppure di II specie secondo che l'ideale generico fR, $f \in \mathbb{P}^N$, è primo oppure ammette la decomposizione primaria $fR = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}_0$, dove $\mathfrak{p}$ è un primo di altezza 1 e $\mathfrak{q}_0$ è $\mathfrak{m}$-primario (per ogni n).*

COROLLARIO 5.7. *La varietà X è proiettivamente S_2 se e solo se, per ogni $n \geq 1$, si ha $U_n = V_n$, ossia un divisore $f \cdot X$ è primo se e solo se fR è primo (il che accade per $f \in \mathbb{P}^N$ generico).*

DIM. Segue immediatamente da 3.7, 5.5 e 5.6. $\square$

6 – Una interpretazione geometrica

Per ogni schema noetheriano integro $(X, \mathcal{O}_X)$ denotiamo con $\mathcal{O}_X^{(1)}$ l'$\mathcal{O}_X$-modulo definito, su un aperto affine $U = \operatorname{Spec} A$ di X, da $\Gamma(U, \mathcal{O}_X^{(1)}) = A^{(1)}$. Consideriamo inoltre lo schema $X^{(1)} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X^{(1)}$ e sia $g \colon X^{(1)} \longrightarrow X$ il morfismo associato alle inclusioni $A \longrightarrow A^{(1)}$ (cfr. ad es. [8], ch. II, ex. 5.17, oppure [4], §5, prop. 5.10.13).

PROPOSIZIONE 6.1. *Sia $X = \operatorname{Proj} R$ uno schema proiettivo integro sul campo K. Risulta:*

a) $\mathcal{O}^{(1)} \cong R^{(1)\sim}$;

b) $X^{(1)} \cong \operatorname{Proj} R^{(1)}$, *dunque anche $X^{(1)}$ è uno schema proiettivo;*

c) *si ha un diagramma commutativo:*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook] \arrow[dr] & S \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"] & R^{(1)} \arrow[d, "\sim"] \\ & \bigoplus\limits_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}(n)) \arrow[r] & \bigoplus\limits_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}^{(1)}(n)). \end{tikzcd}$$

DIM. a) Consideriamo il ricoprimento di X costitutito dagli aperti del tipo $U = D(x) = \operatorname{Spec} R_{(x)}$ con $x \in R_1$. Si ha: $\mathcal{O}^{(1)}|_U = (R_{(x)})^{(1)\sim}$, $R^{(1)\sim}|_U = (R^{(1)})^{\sim}_{(x)}$. L'asserto segue allora dall'uguaglianza $(R_{(x)})^{(1)} = (R^{(1)})_{(x)}$, stabilita in [14], 5.9 (2). b) Il primo asserto segue da a). Il secondo è ovvio. c) In virtù di a), si ha canonicamente un morfismo iniettivo $R^{(1)} \longrightarrow \bigoplus\limits_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}^{(1)}(n))$, che risulta anche suriettivo. Sia infatti $x_0, \dots, x_r$ una base di R_1 e sia $U_i = \operatorname{Spec} R_{(x_i)}$. Una sezione $s \in H^0(X, \mathcal{O}^{(1)}(n))$ è una collezione di sezioni $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^{(1)}(n)) = R^{(1)}(n)_{(x_i)}$ tali che $s_i = s_j$ su $U_i \cap U_j$. Allora, posto $s_i = p_i / x_i^{m_i}, p_i \in R^{(1)}_{nm_i}$, si ha $p_i / x_i^{m_i} = p_j / x_j^{m_j}$ in $R^{(1)}_{(x_i x_j)}$, da cui $s \in \cap R^{(1)}_{x_i} = S(R^{(1)}) = R^{(1)}$ ($R^{(1)}$ è S_2). L'isomorfismo così ottenuto si restringe poi all'isomorfismo $S \longrightarrow \bigoplus\limits_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}(n))$: infatti se $s \in H^0(X, \mathcal{O}(n))$ allora la sezione $s_i =$

$s|_{U_i} \in R(n)_{(x_i)}$ donde, posto $s_i = p_i/x_i^{m_i}$, risulta $p_i \in R(n)$ e pertanto $p_i/x_i^{m_i} = p_j/x_j^{m_j} \in \cap R_{x_i} = S$. □

OSSERVAZIONE 6.2. L'isomorfismo $S \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}(n))$ provato in 6.1 (c) consente di ritrovare, talvolta più rapidamente, proprietà stabilite per altra via. Ad esempio:

a) la caratterizzazione data in [17], §77, prop. 3 delle varietà di I specie: "$X = \operatorname{Proj} R$ è di I specie se e solo se, per ogni intero n, la mappa $\alpha_n : R_n \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}(n))$ è biiettiva, ovvero il sistema lineare secato su X dalle ipersuperfici di grado n è completo" discende ora immediatamente dalla prop. 3.2;

b) la caratterizzazione delle varietà normali già ricordata nel §3 ($X = \operatorname{Proj} R$ è normale se e solo se $S = \overline{R}$) è stabilita anche in [8] (cfr. ch. II, dim. del th. 5.19 ed ex. 5.14 (a)) ragionando su $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}(n))$ anziché su S.

Se A è un dominio finitamente generato sopra un campo K, per ogni $f \in A$ denotiamo con $(fA)^0$ intersezione delle componenti primarie isolate di fA, con $\operatorname{div}(f)$ il divisore di Weil su $\operatorname{Spec} A$ associato alla funzione razionale f.

Le successive considerazioni del presente paragrafo sono suggerite dal seguente:

LEMMA 6.3. *Se A è un dominio finitamente generato sul campo K, allora:*

a) *per ogni $f \in A^{(1)}$, $\operatorname{div}(f) \geq 0$ e $\operatorname{div}(f) = 0$ se e solo se $f \in A^{(1)*}$;*

b) *per ogni $f, g \in A$, risultano equivalenti*

i) $\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(g)$;

ii) $(fA)^0 = (gA)^0$;

iii) $fA^{(1)} = gA^{(1)}$;

c) *per ogni $f \in F = K(A)$, si ha $\operatorname{div}(f) = 0$ se e solo se $f \in A^{(1)*}$.*

DIM. a) Segue immediatamente dalla definizione di $\operatorname{div}(f)$ (cfr. §5 per i richiami sui divisori). b) *i)* $\Longleftrightarrow$ *ii)* Segue dal fatto che il ciclo associato all'ideale $(fA)^0$ coincide con $\operatorname{div}(f)$ (cfr. [5], ch. I, §1.5). *ii)* $\Longleftrightarrow$ *iii)* Per ogni $f \in A$, se $fA = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s \cap \mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}_i$ = componente primaria isolata relativa al primo $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}'$ = intersezione delle componenti primarie immerse, allora $fA^{(1)} = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$, dove $Q_i = \mathfrak{q}_i A_{\mathfrak{p}_i} \cap A^{(1)}$ (cfr. [14], dim. di

5.6 (1)). Da qui segue immediatamente l'asserto. c) Posto $f = a/b$, con $a, b \in A$, $b \neq 0$, si ha $\operatorname{div}(a) = \operatorname{div}(b)$, quindi $aA^{(1)} = bA^{(1)}$ in virtù di b), $i) \implies ii)$, e pertanto $a/b \in A^{(1)}*$. □

Sia ora $(X, \mathcal{O}_X)$ uno schema integro di tipo finito su un campo K. Il lemma precedente mostra come la mappa naturale α: Cart $X \longrightarrow \operatorname{Div} X$ definita da $\alpha(D) = [D]$ (cfr. §5 per le notazioni e i richiami) può non essere iniettiva se lo schema X non è S_2 e che quindi, mentre a divisori di Cartier linearmente equivalenti corrispondono sempre divisori di Weil linearmente equivalenti, può non sussistere il viceversa.

Il fascio $\mathcal{O}_X^{(1)}$ definito all'inizio del paragrafo permette di definire una relazione di equivalenza $\approx$ tra i divisori di Cartier di X che rende ben posta ed iniettiva la mappa $\overline{\alpha}$: $\operatorname{Cart} X/ \approx \longrightarrow \operatorname{Div} X$. Attraverso tale relazione si perviene poi ad una "equivalenza lineare generalizzata" tra i divisori di Cartier che corrisponda a quella usuale definita in $\operatorname{Div} X$. Sussiste infatti la seguente:

PROPOSIZIONE 6.4. *Sia X uno schema integro di tipo finito su un campo K e siano $D = \{U_i, f_i\}$ e $D' = \{U_i, f_i'\}$ due divisori di Cartier di X. Risulta:*
a) $[D'] = [D]$ *se e solo se* $f_i/f_i' \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^{(1)*})$;
b) $[D'] = [D] + \operatorname{div}(g)$ *se e solo se* $gf_i/f_i' \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^{(1)*})$.

DIM. Ci si può ricondurre al caso in cui $X = \operatorname{Spec} A$ è affine e $D = (X, f)$, $D' = (X, f')$, $f, f' \in F = K(A)$. L'enunciato è ovvio se $f = f' = 0$. Supponiamo allora, p.es., $f' \neq 0$. Da $[D'] = [D]$ segue $\operatorname{div}(f/f') = 0$ e, analogamente, da $[D'] = [D] + \operatorname{div}(g)$ segue $\operatorname{div}(gf/f') = 0$. Entrambi gli asserti seguono allora da 6.3 (c). □

Consideriamo ora in Cart X la relazione di equivalenza $D \approx D'$ se $f_i/f_i' \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^{(1)*})$, e la relazione di equivalenza lineare generalizzata $D \equiv D'$ se $D - D' \approx \operatorname{div}(g)$ (ovvero $gf_i/f_i' \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^{(1)*})$).

Poniamo poi $D \succeq 0$ se $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^{(1)})$. L'usuale condizione di effettività $D \geq 0$ implica sempre $D \succeq 0$; inoltre sempre da 6.3 (a) segue che $D \succeq 0$ implica $[D] \geq 0$.

È ben noto che dato un divisore $D = \{U_i, f_i\}$ le sezioni globali del fascio invertibile $\mathcal{O}(D)$ sono in corrispondenza biunivoca con i divisori effettivi D' linearmente equivalenti a D. Questo risultato si può estendere considerando il fascio quasi-coerente $\mathcal{O}(D)^{(1)}$ definito sugli aperti U_i da $\mathcal{O}(D)^{(1)}|U_i = f_i^{-1}\mathcal{O}^{(1)}|U_i$. Si ha infatti la seguente:

PROPOSIZIONE 6.5. *Le sezioni globali di $\mathcal{O}(D)^{(1)}$ sono in corrispondenza biunivoca con i divisori $D' \succeq 0$ tali che $D' \equiv D$.*

DIM. Sia $s \in H^0(X, \mathcal{O}(D)^{(1)})$, considerata come funzione razionale su X. Per ogni i, $s_i = s|_{U_i} \in f_i^{-1}\Gamma(U_i, \mathcal{O}^{(1)})$, così che $g_i = f_i s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^{(1)})$. Il divisore D' rappresentato dal sistema $\{U_i, g_i\}$ è $\succeq 0$ e tale che $D' \equiv D$. Viceversa, se D' è un tale divisore, rappresentato dal sistema $\{U_i, g_i\}$, esiste una funzione razionale s tale che $sf_i/g_i = b_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^{(1)*})$. Poiché allora $s|_{U_i} = b_i f_i^{-1} g_i \in f_i^{-1}\Gamma(U_i, \mathcal{O}^{(1)})$, risulta $s \in H^0(X, \mathcal{O}(D)^{(1)})$. □

In conclusione, vogliamo collegare il gruppo di Picard di uno schema X, ed il suo quoziente modulo l'equivalenza $\equiv$, con il gruppo di Picard dello schema $X^{(1)}$.

PROPOSIZIONE 6.6. *La successione esatta*

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{O}^{(1)*} \longrightarrow Q \longrightarrow 1,$$

dalla quale il fascio Q è definito, induce una successione esatta

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(X,Q) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(X,\mathcal{O}^{(1)*}) & \longrightarrow & H^1(X,Q) \\ & & \| \wr & & & & \\ & & \mathrm{Pic}(X) & & & & \end{array}$$

(parte della successione esatta lunga associata), in cui:

a) $H^1(X, \mathcal{O}^{(1)*}) \cong \mathrm{Pic}\,(X^{(1)})$ *ed* $\alpha \cong g^*$, *il pull-back mediante* g;

b) $\mathrm{Im}\,(\alpha) \cong \mathrm{Pic}(X)/\equiv$.

DIM. a) Segue, per esempio, da [8], p. 252, ex. 8.2, per il fatto che g è un morfismo affine e $g_*(\mathcal{O}_{X^{(1)}}) = \mathcal{O}^{(1)}$, d'onde $H^1(X, \mathcal{O}^{(1)*}) \cong H^1(X^{(1)}, \mathcal{O}^*_{X^{(1)}}) \cong \mathrm{Pic}\,(X^{(1)})$. b) è immediata. □

Ringraziamenti

Si ringraziano la Dott. Chiara Martinengo ed il Prof. Paolo Salmon per utili consigli ricevuti durante la redazione del presente lavoro.

BIBLIOGRAFIA

[1] M.F. ATIYAH - I.G. MACDONALD: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.

[2] N. BOURBAKI: *Algebre Commutative*, ch. III. et V., Herman, 1961-64.

[3] P. DUBREIL: *Sur la dimension des ideaux de polynomes*, J. Math. Pures Appl. 15 (1936), 271-283.

[4] A. GROTHENDIECK - J. DIEUDONNÉ: *Elements de Geometrie Algebrique*, IV, Publ. I.H.E.S. 24, 1965.

[5] W. FULTON: *Intersection Theory*, Springer, 1984.

[6] S. GRECO: *Normal Varieties*, I.N.D.A.M., 1978.

[7] S. GOTO - K. WATANABE: *On graded rings, I*, J. Math. Soc. Japan 30/2 (1978), 179-213.

[8] R. HARTSHORNE: *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.

[9] N. KUAN: *Some results on normality of a graded ring*, Pacific J. Math. 64 (1976), 455-465.

[10] J.P. JOUANOLOU: *Theoremes de Bertini et Applications*, Birkhauser, Progress in Mathematics 42 (1983).

[11] S. LANG: *Introduction to Algebraic Geometry*, J. Wiley & Sons, 1964.

[12] H. MATSUMURA: *Commutative Algebra*, Benjamin, 1970.

[13] C. PEDRINI: *Incollamenti di ideali primi e gruppi di Picard*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 48 (1973), 39-66.

[14] L.J. RATLIFF, JR.: *On quasi-unmixed local domains, the altitude formula and the chain condition for prime ideals (II)*, Pacific. J. Math. 92 (1970), 99-144.

[15] M. ROGGERO: *Su alcuni aspetti algebrici dei sistemi lineari e del II teorema di Bertini*, Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino 39/3 (1981), 103-128.

[16] A. SEIDENBERG: *The hyperplane sections of normal varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 357-386.

[17] J.P. SERRE: *Faisceaux Algebriques Coherentes*, Annals of Math. 61/2 (1955), 197-278.

[18] O. ZARISKI: *Pencils on an Algebraic Variety and a new proof of a theorem of Bertini*, Trans. Amer. Math. Soc. 50 (1941), pp. 48-70.

[19] O. ZARISKI - P. SAMUEL: *Commutative Algebra*, vol. II, Van Nostrand, 1960.

Lavoro pervenuto alla redazione il 4 aprile 1986
ed accettato per la pubblicazione il 18 luglio 1990
su parere favorevole di U. Bartocci e di P. Salmon

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Lucio Guerra - Dipartimento di Matematica - Via Vanvitelli 1 - 06100 Perugia - Italia