Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 11 , Roma (1991), 15-21

Una caratterizzazione delle quadriche non singolari di PG(4,q)

O. FERRI - G. TALLINI(•)

RIASSUNTO – *Si prova il seguente teorema: un k-insieme K di* $PG(n,q)$, *con* $n \geq 4$ *e* $k \geq \theta_{n-1}$, *di classe* $[c, c+q, c+2q]_3$, $c \leq q^2+1$, *tale che esistano spazi a tre dimensioni c-secanti e* $(c+q)$*-secanti K, e di classe* $[1,a,b]_2$, $b \geq 2q+1$ *è una quadrica non singolare di* $PG(4,q)$.

ABSTRACT – *We prove the following theorem: a k-set K in* $PG(n,q)$, *with* $n \geq 4$ *and* $k \geq \theta_{n-1}$, *of class* $[c, c+q, c+2q]_3$, $c \leq q^2+1$, *such that c-secant and* $(c+q)$*-secant 3-dimensional spaces to K exist, and of class* $[1,a,b]_2$, $b \geq 2q+1$, *is a non singular quadric of* $PG(4,q)$.

KEY WORDS – *Galois geometry.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 05B25 - 51D20 - 51EXX - 51E20

1 – Introduzione

Ricordiamo che (cfr. [8], [9]) in $PG(n,q)$ un k-insieme K dicesi di classe $[a_1, a_2, a_3]$ rispetto agli S_h o, brevemente, di classe $[a_1, a_2, a_3]_h$ (con $a_1 < a_2 < a_3$) se ogni sottospazio h-dimensionale S_h di $PG(n,q)$ incontra K in a_1 ovvero a_2 ovvero a_3 punti. Dicesi poi che K è di tipo $(a_1, a_2, a_3)_h$ se è di classe $[a_1, a_2, a_3]_h$ ed esistono S_h che incontrano K in a_i punti per ogni $i = 1,2,3$. Nel seguito porremo sempre $\theta_r = \sum_{i=0}^{r} q^i$.

(•)Lavoro eseguito con il contributo dei fondi M.P.I.

In $PG(4,q)$ una quadrica non singolare Q è un θ_3-insieme di tipo $(q^2+1, q^2+q+1, q^2+2q+1)_3$ rispetto agli S_3 e di tipo $(1, q+1, 2q+1)_2$ rispetto ai piani. In questo Lavoro diamo una caratterizzazione delle quadriche Q, dimostrando il seguente

TEOREMA I. *In $PG(n,q)$, $n \geq 4$, un k-insieme K, con $k \geq \theta_{n-1}$, di classe $[c, c+q, c+2q]_3$, con $c \leq q^2+1$, che ammetta sia S_3 c-secanti che S_3 $(c+q)$-secanti K, e di classe $[1,a,b]$, con $b \geq 2q+1$, esiste solo se è $n=4$ ed è una quadrica non singolare di $PG(4,q)$.*

Osserviamo che esistono svariati insiemi di classe $[c, c+q, c+2q]_3$ in $PG(4,q)$. Fissate infatti in $PG(4,q)$ c rette a due a due sghembe e tali che mai tre appartengono ad uno stesso iperpiano (cfr. [10]), l'unione di tali rette è un insieme K di tipo $(c, c+q, c+2q)_3$. Dal teorema I segue allora che (cfr. [11]):

II. *Una fibrazione mediante rette in $PG(4,q)$ costituita da q^2+1 rette, tali che mai tre appartengono ad un stesso iperpiano e tale che l'insieme K unione di tali rette sia di classe $[1,a,b]_2$, con $b \geq 2q+1$, risulta una fibrazione totale di una quadrica non singolare di $PG(4,q)$, onde q è pari.*

2 – Prime proprietà degli insiemi K

Sia K un k-insieme di $PG(n,q)$, con $n \geq 4$ e $k \geq \theta_{n-1}$ di classe $[c, c+q, c+2q]_3$, con $c \leq q^2+1$ e che ammette spazi S_3 sia c-secanti che $(c+q)$-secanti, e di classe $[1,a,b]_2$ con $b \geq 2q+1$.

Sia β un piano m-secante K, denotati con w_1, w_2, w_3 i numeri degli S_3 per il piano β che siano rispettivamente c-secanti, $(c+q)$-secanti, $(c+2q)$-secanti K, si ha:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} w_1+w_2+w_3=\theta_{n3} \\ (c-m)w_1+(c+q-m)w_2+(c+2q-m)w_3=k-m\,. \end{cases}$$

Dalla $(2.1)_{\mathrm{II}}$, tenuto conto della $(2.1)_{\mathrm{I}}$ si ha: $(c-m)\theta_{n-3}+qw_2+2qw_3=k-m$, cioè

$$(2.2) \qquad w_2+2w_3=\frac{k-c\theta_{n-3}}{q}+m\theta_{n-4}$$

Proviamo che:

(2.3) *Ogni* $S_3(c+q)$*-secante* K *contiene qualche piano* b*-secante* K.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che esista un $\overline{S}_3$, $(c+q)$-secante K, che non contenga alcun piano b-secante K. Allora in $\overline{S}_3$ l'insieme $H = \overline{S}_3 \cap K$ (non potendo essere ad un sol carattere rispetto ai piani, cfr. [8]) è di tipo $(1,a)_2$ e quindi (cfr. [12]) risulta $a = q+1$ ed H è una retta o una (q^2+1)-calotta.

Se H è una retta, risulta $c = 1$ e quindi K è di classe $[1, q+1, 2q+1]_3$. Sia α un piano dell'$\overline{S}_3$ per la retta H. Gli S_3 per α, diversi da $\overline{S}_3$, in numero di $q\theta_{n-4}$, incontrano allora $K-\alpha$, al più, in q punti, onde è $k \leq \theta_{n-2}$ e ciò è assurdo essendo $k \geq \theta_{n-1}$

Se H è una (q^2+1)-calotta, risulta $c = q^2 - q + 1$ e quindi K è di classe $[q^2-q+1, q^2+1, q^2+q+1]_3$. Sia α un piano dell'$\overline{S}_3$ secante H in un $(q+1)$-arco. Gli S_3 per α, diversi da $\overline{S}_3$, in numero di $q\theta_{n-4}$ incontrano allora $K-\alpha$, al più, in q^2 punti, onde è $k \leq (q^2+1)+q^3\theta_{n-4}$ ciò è assurdo essendo $k \geq \theta_{n-1}$. Ne segue l'asserto

Consideriamo ora un S_3 che risulti $(c+q)$-secante K e sia β un suo piano b-secante K (esistente per la (2.3)). Relativamente a β deve aversi (cfr (2.2)):

$$w_2 + 2w_3 = \frac{k - c\theta_{n-3}}{q} + b\theta_{n-4} \tag{2.4}$$

Inoltre dalla $(2.1)_1$ risulta: $w_2 + w_3 \leq \theta_{n-3} \implies 2w_2 + 2w_3 \leq 2\theta_{n-3} \implies$ (essendo $w_2 \geq 1$) $w_2 + 2w_3 \leq 2q\theta_{n-4} + 1$. Dalla (2.4) si ha allora (essendo $b \geq 2q+1$, $k \geq \theta_{n-1}$, $c \leq q^2+1$, $n \geq 4$):

$$2q\theta_{n-4} + 1 \geq w_2 + 2w_3 = \frac{k - c\theta_{n-3}}{q} + b\theta_{n-4} \geq \frac{k - c\theta_{n-3}}{q} +$$
$$+ 2q\theta_{n-4} + \theta_{n-4} \implies 1 \geq \frac{k - c\theta_{n-3}}{q} + \theta_{n-4}$$

da cui:

$$n = 4, \quad k = \theta_3, \quad c = q^2+1, \quad b = 2q+1. \tag{2.5}$$

Dalla (2.5) e dalla (2.2) si ha che se β è un qualsiasi piano b-secante K, relativamente a β risulta:

$$w_2 + 2w_3 = b = 2q + 1 \tag{2.6}$$

cioè $w_2 = 1 + 2(q - w_3)$. Da ciò e dalla $(2.1)_1$, tenuto conto che $n = 4$, si ha: $w_1 + q = w_3$. Ma è $w_2 \geq 1$ e quindi $w_3 \leq q$, onde $w_1 + q \leq q$ cioè $w_1 \leq 0$ ossia $w_1 = 0$. Se ne deduce che:

(2.7) *Ogni S_3 c-secante K non può contenere piani b-secanti K.*

Dalla (2.7) si ha che ogni S_3 c-secante K incontra K in un insieme H di tipo $(1, a)_2$, onde, cfr. [12], risulta $a = q + 1$ e K è una $(q^2 + 1)$-calotta (essendo $c = q^2 + 1$).

Osserviamo inoltre che dalla (2.2) si ha, per $n = 4$, $k = \theta_3$ e $c = q^2 + 1$:

$$w_2 + 2w_3 = m\,. \tag{2.8}$$

Dalla (2.8) si ha:

$$m = 1 \implies w_3 = 0\,, \quad w_2 = 1\,, \quad w_1 = q\,. \tag{2.9}$$

Abbiamo così provato che:

III. *Un k-insieme K di $PG(n, q)$, con $n \geq 4$, $k \geq \theta_{n-1}$ di classe $[c, c+q, c+2q]_3$, $c \leq q^2 + 1$, e che ammette sia S_3 c-secanti che $S_3(c+q)$-secanti K e di classe $[1, a, b]_2$, con $b \geq 2q + 1$, è tale che risulta:*

$$n = 4\,, \quad c = q^2 + 1\,, \quad k = \theta_3\,, \quad a = q + 1\,, \quad b = 2q + 1\,.$$

Inoltre ogni S_3 c-secante K incontra K in una $(q^2 + 1)$-calotta. Infine per ogni piano 1-secante K passa un solo S_3 che sia θ_2-secante, nessun S_3 che sia $(\theta_2 + q)$-secante e q che risultano $(q^2 + 1)$-secanti K.

3 – Dimostrazione del Teorema I

Consideriamo un $\tilde{S}_3$ che sia (q^2+1)-secante K e quindi intersecante K in una (q^2+1)-calotta H, (cfr. prop. III). Sia P un punto di H e τ il piano tangente in P ad H, onde τ è un piano 1-secante K. Per la (2.9) esiste un solo $\overline{S}_3$ per τ che risulta θ_2-secante K, tutti gli altri S_3 per τ risultano (q^2+1)-secanti e quindi incontrano K in una (q^2+1)-calotta (cfr. prop. III). Sia ℓ una qualsiasi retta per P non appartenente ad $\overline{S}_3$. L'S_3 congiungente ℓ e τ incontra K in una (q^2+1)-calotta che ammette τ come piano tangente, dunque ℓ, non giacendo in τ è 2-secante K. Si è così provato che:

(3.1) *Ogni retta ℓ per P, che non giaccia in $\overline{S}_3$, incontra K in due punti.*

Un piano α per ℓ può allora essere $(q+1)$-secante K oppure $(2q+1)$-secante K. Poiché tutte le rette per P, diverse dalla retta $r = \alpha \cap \overline{S}_3$, appartenenti ad α, sono 2-secanti K, per la (3.1), si ha che r è 1-secante K in P se α è $(q+1)$-secante K, mentre appartiene a K se α è $(2q+1)$-secante K. Ne segue che:

(3.2) *Ogni retta per P o è 2-secante K o appartiene a K o è tangente a K in P. Inoltre $\overline{S}_3$ incontra K in un cono costituito da $q+1$ rette per P.*

Sia s una qualsiasi retta di $PG(4,q)$, non di $\tilde{S}$. Essa incontrerà $\tilde{S}_3$ in un punto A. Se $A \in H$, per la (3.2) (ove si faccia $P = A$), la s o appartiene a K oppure è 1-secante o è 2-secante K. Se $A \notin H$, consideriamo un piano π per A, di $\tilde{S}_3$, tangente ad H in un punto T. L'S_3 congiungente π con s, per la (2.9) o incontra K in una (q^2+1)-calotta ed allora s è i-secante K, con $i = 0,1,2$, ovvero incontra K in un cono Γ con il vertice in T costituito da $q+1$ rette per T (cfr. (3.2)). In questo secondo caso se $j = |s \cap K|$, le j rette congiungenti T con tali j punti appartengono al cono Γ e quindi a K. Dunque il piano β congiungente T con s ha in comune con K esattamente tali j rette onde $|\beta \cap K| = jq+1$, cioè β è $(jq+1)$-secante K ma allora necessariamente $j = 0,1,2$. Ne segue che:

(3.3) *Ogni retta di $PG(4,q)$ che non appartenga a K, ha, al più, due punti in comune con K, cioè K è di classe $[0,1,2,q+1]_1$ rispetto alle rette.*

Proviamo che il θ_3-insieme K di classe $[0,1,2,q+1]_1$ è non singolare cioè per ogni $P \in K$ passa almeno una retta 2-secante K. Ragionando per assurdo supponiamo che per P non passi alcuna 2-secante K. Allora ogni S_3 per P non può essere (q^2+1)-secante K (altrimenti $H = S_3 \cap K$ sarebbe una (q^2+1)-calotta e quindi per P passerebbero 2-secanti H e quindi K). Esiste dunque un $\tilde{S}_3$ non per P che sia (q^2+1)-secante K cioè incontri K in una (q^2+1)-calotta H. Poiché per ipotesi ogni retta per P o è tangente a K in P o appartiene a K si ha che K coincide con il cono proiettante da P la (q^2+1)-calotta H, onde $|K| = q(q^2+1)+1$ e ciò è assurdo essendo $|K| = \theta_3$.

Si è così provato che:

(3.4) *Il θ_3-insieme K di $PG(4,q)$ è di classe $[0,1,2,q+1]_1$ è non singolare.*

Dalla (3.4), tenuto conto di [6], segue il Teorema I del n.1.

Ringraziamenti

Gli Autori ringraziano i Prof. F. Mazzocca e N. Melone per gli interessanti suggerimenti.

BIBLIOGRAFIA

[1] O. FERRI: *Una caratterizzazione delle q^2-calotte di $AG(3,q)$*, Rend. Mat. Univ. Roma 3-4 (1985), 285-289.

[2] O. FERRI: *Su una caratterizzazione dei paraboloidi iperbolici di $AG(3,q)$*, Rend. Mat. Univ. Roma 1-2 (1986), 239-243.

[3] O. FERRI: *Proprietà grafiche caratterizzanti gli iperboloidi iperbolici di $AG(3,q)$*, Rend. Mat. Univ. Roma 1 (1987), 131-138.

[4] O. FERRI: *Sui k-insiemi di classe $[0,1,q-1,q,q+1,2q]_2$ in $AG(3,q)$ con $k \geq q^2-q$*, Riv. Mat. Pura ed Appl. Univ. Udine 6, (1990), 67-74.

[5] G. TALLINI: *Sulle k-calotte degli spazi lineari finiti*, Note I e II Rend. Acc. Naz. Lincei (8) 20 (1956), 311-317, 442-466.

[6] G. TALLINI: *Sulle k-calotte di uno spazio lineare finito*, Ann. Mat. (4), 42 (1956), 119-164.

[7] G. TALLINI: *Caratterizzazione grafica delle quadriche ellittiche negli spazi finiti*, Rend. Mat. Univ. Roma, 16 (1957), 328-351.

[8] G. TALLINI: *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, Relaz. n. 30. Napoli (1974).

[9] G. TALLINI: *Graphic characterization of algebraic varieties in a Galois space*, Atti Convegno Linceo Teorie Combinatorie (Roma Sett. 1973). Acc. Naz. Lincei (1976) Tomo II, 153-165.

[10] G. TALLINI: *Fibrazioni mediante rette in $PG(r,q)$*, Le Matematiche XXXVII, fasc. I, (1982) 8-27.

[11] G. TALLINI: *Fibrazioni mediante rette in una quadrica non singolare, $Q_{4,q}$, di $PG(4,q)$*, Quaderno n.90 Sem. Geom. Combinatorie. Dipart. Mat. Univ. Roma "La Sapienza", dicembre (1988), 1-20.

[12] J.A. THAS: *A combinatorial problem*, Geometriae Dedicata 1 (1973), 236-340.

Lavoro pervenuto alla redazione il 7 novembre 1989
ed accettato per la pubblicazione il 19 aprile 1990
su parere favorevole di F. Mazzocca e di N. Melone

INDIRIZZO DEGLI AUTORI:

Osvaldo Ferri - Dipartimento di Matematica - Università degli studi di L'Aquila - 67100 L'Aquila - Italia

Giuseppe Tallini - Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Roma "La Sapienza" - P.le A. Moro, 5 - 00185 Roma - Italia