Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 11 , Roma (1991), 31-38

Sugli spazi lineari con n^2+n+1 punti e n^2+3n rette

P. DE VITO - P.M. LO RE(•)

Dedicato al Prof. G. Tallini in occasione del suo 60° compleanno

RIASSUNTO – *Si classificano gli FLS con n^2+n+1 punti e n^2+3n rette, $n>4$, dotati di al più un punto di grado $n+2$.*

ABSTRACT – *We classify FLS's with $v=n^2+n+1$, $b=n^2+3n$, $n>4$, in which there exists at most one point of degree $n+2$.*

KEY WORDS – *Linear spaces.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 05B25 - 51E30

1 – Introduzione

Uno spazio lineare finito non degenere (FLS) è una coppia $(P,\mathcal{L})$ costituita da un insieme P non vuoto, i cui elementi si dicono *punti*, e da un insieme $\mathcal{L}$ di parti di P, dette *rette*, tali che per due punti passa una e una sola retta e ogni retta ha almeno due punti. Se esistono almeno due rette l'FLS si dice *non degenere*. Si porrà $b=|\mathcal{L}|$, $v=|P|$.

Si definisce *grado* di un punto p il numero $[p]$ delle rette passanti per esso; il numero $|\ell|$ dei punti di una retta $\ell\in\mathcal{L}$ prende il nome di *lunghezza*

(•)Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. e dei gruppi di ricerca 40% del M.U.R.S.T.

della retta. Due rette ℓ ed ℓ' che coincidono o che non hanno punti in comune si dicono *parallele*.

Un FLS in cui tutti i punti si distribuiscono su due rette incidenti di lunghezze s e t si dice (s,t)-*cross*. Se una delle due rette ha lunghezza 2, tale FLS si dice *near-pencil*.

Un classico risultato nell'ambito dello studio degli FLS non degeneri è il Teorema di DE BRUIJN-ERDÖS-HANANI ([2], [4]) che afferma che $b \geq v$ e $b = v$ se e soltanto se $(P, \mathcal{L})$ è un piano proiettivo o un near-pencil.

Un primo problema che si pone è lo studio dell'immergibilità di un FLS in un piano proiettivo. A tale proposito richiamiamo un risultato di Vanstone che ci sarà utile nel seguito.

TEOREMA I ([6]). *Sia P un insieme di n^2+n+1 punti e $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ldots, \ell_m\}$, $m \geq n^2$, una famiglia di sottoinsiemi di $\mathcal{L}$, $|\ell_i| = n+1$, $i = 1, \ldots, m$. Se $|\ell_i \cap \ell_j| = 1$, $1 \leq i < j \leq m$, allora $\mathcal{L}$ è immergibile in un piano proiettivo finito di ordine n.*

Un altro tipico problema è lo studio dell'esistenza di FLS soddisfacenti opportune condizioni aritmetiche, ad esempio aventi un assegnato numero di punti o di rette. ERDÖS, FOWLER, SÖS, WILSON ([3]) hanno provato che non esistono FLS con n^2+n+1 punti e $n^2+n+1 < b < n^2+2n+1$; inoltre, un FLS con n^2+n+1 punti e $b = n^2+2n+1$ rette si ottiene da un piano proiettivo di ordine n deformando una delle sue rette in un piano proiettivo o in un near-pencil. Se $n = q^2+q$ non esistono spazi lineari con n^2+n+1 punti e $n^2+2n+2 \leq b \leq n^2+2n+q$. Infine, un FLS con $v = n^2+n+1$ che non sia né un piano proiettivo né un near-pencil né sia ottenuto da un piano proiettivo deformando una sua retta in un FLS ha $b > n^2+(2+c)n$ rette, con $c = 0,147899$. Nello stesso lavoro essi congetturano che la diseguaglianza possa essere migliorata in $b \geq n^2+3n+0(1)$. In seguito la diseguaglianza in [3] è stata migliorata da BLOKHUIS, SCHMITT e WILBRINK ([1]), i quali hanno provato che, nelle stesse ipotesi per v, risulta $b \geq n^2+3n-4\sqrt{n}$. Ha pertanto interesse studiare gli FLS con n^2+n+1 punti e n^2+3n rette. Esempi di tali FLS si ottengono deformando una retta di un piano proiettivo di ordine n in

i) un doppio near-pencil (i.e. l'FLS su $n+1$ punti avente una retta con $n-1$ punti e tutte le altre rette di lunghezza 2)
ii) un piano proiettivo con $n-1$ punti unito un punto esterno.

Un ulteriore esempio si ottiene considerando un piano proiettivo di ordine 7 con una retta deformata in un (4,5)-cross.

Osserviamo che non è difficile verificare che un FLS con n^2+n+1 punti e n^2+3n rette ottenuto deformando una retta di un piano proiettivo di ordine n è dotato di al più un punto di grado $n+2$.

Nel presente lavoro si ottiene il seguente risultato.

TEOREMA II. *Un FLS $(P,\mathcal{L})$ con n^2+n+1 punti e n^2+3n rette con $n>4$, dotato di al più un punto di grado $n+2$, si ottiene da un piano proiettivo di ordine n deformando una sua retta in un FLS $(P',\mathcal{L}')$ con $n+1$ punti e $2n$ rette. Se esiste il punto di grado $n+2$ risulta $n=7$ e $(P',\mathcal{L}')$ è un (4,5)-cross.*

2 – Studio degli FLS con n^2+n+1 punti e n^2+3n rette

Sia $(P,\mathcal{L})$ un FLS con $v=n^2+n+1$ e $b=n^2+3n$ verificante la

(2.1) esiste al più un punto di grado $n+2$.

LEMMA 2.1. *Se $n>4$, non esistono rette di lunghezza maggiore di $n+1$* (cfr. [3] Lemma 1).

DIM. Ricordiamo che se in $(P,\mathcal{L})$ esiste una retta di lunghezza k risulta $b\geq 1+k^2(v-k)_{/(v-1)}$ (cfr. [5]). Se $k\leq 2_{/3}v$ la funzione $k^2(v-k)$ è crescente, pertanto in tal caso da $k\geq n+2$ segue $b\geq n^2+3n+1-4_{/n}$. Poiché $b=n^2+3n$ si ha allora $n\leq 4$. Se $k>2_{/3}v$, sia k la massima lunghezza delle rette e sia L una retta di lunghezza k. Poiché $(P,\mathcal{L})$ non è un near-pencil esistono due punti non appartenenti ad L; per ciascuno di essi passano k rette incidenti L. Ne segue $b\geq 2k$; nell'ipotesi $k>2_{/3}v$ risulta $b\geq 4_{/3}v$ e cioè $1\leq n\leq 4$. Pertanto, se $n>4$ in entrambi i casi si ottiene una contraddizione.

Supporremo d'ora in poi $n>4$.

LEMMA 2.2. *Ogni punto ha grado almeno $n+1$.*

DIM. Se esistesse un punto di grado $\leq n$, poiché $v = n^2 + n + 1$, esso dovrebbe passare almeno una retta di lunghezza $n + 2$.

È evidente inoltre che:

LEMMA 2.3. *Un punto ha grado $n + 1$ se e solo se per esso passano solo rette di lunghezza $n + 1$.*

LEMMA 2.4. *Esistono punti di grado $n + 1$ e, conseguentemente, rette di lunghezza $n + 1$.*

DIM. Supponiamo per assurdo che non esistano punti di grado $n + 1$; per la (2.1) e per il Lemma 2.2 risulta $[x] \geq n + 3$ per ogni $x \in P$ ad eccezione di al più un punto. Contando le coppie (x, ℓ) con $x \in \ell$ e $\ell \in \mathcal{L}$ si ha, essendo $|\ell| \leq n + 1$ (Lemma 2.1), $n + 2 + (v - 1)(n + 3) \leq \sum_{x \in P} [x] = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} |\ell| \leq b(n + 1)$; di qui segue $b \geq n^2 + 3n + 1 + 1/(n+1)$ contro l'ipotesi $b = n^2 + 3n$.

Diremo *ordinari* i punti di grado $n + 1$ e le rette di lunghezza $n + 1$, *corte* le rette non ordinarie e indicheremo con x_0 l'eventuale punto di grado $n + 2$.

LEMMA 2.5. *Su ogni retta ordinaria esiste almeno un punto ordinario.*

DIM. Sia L una retta ordinaria e sia a il numero dei punti ordinari su L; distinguiamo due casi:

i) $x_0 \notin L$; esistono almeno $n^2 + 3n + 2 - 2a$ rette incidenti L e dunque $n^2 + 3n = b \geq n^2 + 3n + 3 - 2a$ da cui $a \geq 3/2$, cioè $a \geq 2$;
ii) $x_0 \in L$; esistono almeno $n^2 + 3n + 1 - 2a$ rette incidenti L e dunque $n^2 + 3n = b \geq n^2 + 3n + 2 - 2a$ da cui $a \geq 1$.

Segue subito che

LEMMA 2.6. *Le rette ordinarie sono a due a due incidenti.*

Indichiamo con k_j il numero delle rette contenenti j punti ordinari, con b^* la $\sum_{j\geq 1} k_j$ e con v_0 il numero dei punti ordinari. Per i Lemmi 2.3 e 2.5 risulta b^* uguale al numero delle rette ordinarie.

LEMMA 2.7. *Risulta* $b^* \geq v_0(n+1)^2/(v+n)$ (cfr. [1] Lemma 7).

DIM. Segue subito dal sistema di equazioni

$$\sum_{j\geq 1} k_j = b^*$$

$$\sum_{j\geq 1} jk_j = v_0(n+1)$$

$$\sum_{j\geq 1} j(j-1)k_j = v_0(v_0-1)$$

ottenuto contando le coppie (x,ℓ) con x punto ordinario di ℓ, le terne $(\{x,y\},\ell)$ con x e y punti ordinari di ℓ e considerando la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz.

Si ha inoltre:

LEMMA 2.8. *Su due rette ordinarie che si intersecano in un punto ordinario esistono almeno $n+2$ punti ordinari se le rette non contengono x_0 e almeno $n+1$ punti ordinari se contengono x_0.*

DIM. Siano L ed M due rette ordinarie non contenenti x_0 e sia $x = L\cap M$ un punto ordinario. Denotato con a_L (risp. a_M) il numero dei punti ordinari su L (risp. M), calcolando b a partire da L e da M si ha $n^2+3n = b \geq n^2+n+1+2(n+1-a_L)+2(n+1-a_M) = n^2+5n+5-2(a_L+a_M)$. Si ha pertanto $a_L+a_M \geq n+3$. Supponiamo ora che $x_0 \in L$. Ripetendo il conteggio si ha $n^2+3n = b \geq n^2+n+1+2(n-a_L)+1+2(n+1-a_M) = n^2+5n+4-2(a_L+a_M)$, da cui $a_L+a_M \geq n+2$.

LEMMA 2.9. *Esistono almeno $n^2/2$ punti ordinari.*

DIM. Se x è un punto ordinario, per il Lemma 2.8 sulle $n+1$ rette ordinarie per x esistono almeno $n/2(n+1)+1 > n^2/2+3$ punti ordinari, in quanto il punto x_0 appartiene ad al più una delle rette per x.

LEMMA 2.10. *Esistono almeno $n^2 + 1$ rette ordinarie.*

DIM. Segue immediatamente dai Lemmi 2.7 e 2.9, tenendo conto del fatto che la funzione $y = v_0(n+1)^2_{/(v+n)}$ è crescente rispetto a v_0.

Per i Lemmi 2.6 e 2.10, l'insieme $\mathcal{L}_{n+1}$ delle rette ordinarie soddisfa le ipotesi del Teorema I e pertanto $\mathcal{L}_{n+1}$ è immergibile in un piano proiettivo $(\pi, \mathcal{R})$ di ordine n. D'altra parte, per i Lemmi 2.3 e 2.4, per ogni punto di P passa almeno una retta ordinaria e dunque $P \subseteq \pi$. Risulta pertanto $P = \pi$ essendo $|P| = |\pi|$. Siano $A_1, \dots, A_{n^2+t} (t \geq 1)$ le rette ordinarie di $(P, \mathcal{L})$ (che sono rette di π) e siano $B_1, \dots, B_{n-t+1}$ le rimanenti rette di π.

LEMMA 2.11. *Su ogni retta B_i esistono almeno $t+1$ punti x_{ih} per cui non passano altre rette B_j con $j \neq i$, $j = 1, \dots, n-t+1$.*

DIM. Fissata la retta B_i, esistono altre $n-t$ rette da deformare che intersecano B_i in al più $n-t$ punti distinti.

Sia A_j, $j > n^2 + t$, una retta corta di $(P, \mathcal{L})$ contenente almeno un x_{ih}. Supponiamo per assurdo che tale A_j non sia contenuta in B_i, $i = 1, \dots, n-t+1$, e sia y un punto qualunque in $A_j \setminus B_i$. La retta $\langle y, x_{ih} \rangle$ di π non può essere una delle B_j e dunque è una delle A_i, $i \leq n^2 + t$. Si ha allora l'assurdo $A_j = \langle y, x_{ih} \rangle = A_i$.

Sia $C_i = \{x_{ih} / x_{ih} \in B_i \text{ e } x_{ih} \notin \cup B_j \; j \neq i, j = 1, \dots, n-t+1\}$, $i = 1, \dots, n-t+1$. Distinguiamo due casi:

(i) C_i è contenuto in una retta corta A_i
(ii) non esiste nessuna retta corta contenente C_i.

Nel caso (i) se $y \in B_i \setminus A_i$ e $x_{ih} \in C_i$, la retta $\langle y, x_{ih} \rangle$ è corta e contenuta in B_i. Tali rette, al variare di x_{ih} in C_i, sono a due a due distinte e dunque esistono almeno $t+2$ rette corte contenute in B_i.

Nel caso (ii) sia $\mathcal{L}_i = \{\ell \cap C_i / \ell \in \mathcal{L} \text{ e } |\ell \cap C_i| \geq 2\}$; lo spazio lineare $(C_i, \mathcal{L}_i)$ ha almeno due rette e dunque per il Teorema di DE BRUIJN-ERDŐS-HANANI ([2], [4]) risulta $|\mathcal{L}_i| \geq |C_i| = t+1$.

In entrambi i casi esistono, pertanto, almeno $t+1$ rette corte interamente contenute in B_i, $i = 1, \dots, n-t+1$. Sia $(B_1, \mathcal{L}_1)$ lo spazio lineare su B_1 con $\mathcal{L}_1 = \{\ell \cap B_1 / \ell \in \mathcal{L} \text{ e } |\ell \cap B_1| \geq 2\}$. Si ha $|\mathcal{L}_1| \geq |B_1| = n+1$; risulta pertanto $n^2 + 3n = b \geq n^2 + t + n + 1 + (n-t)(t+1)$, da cui

$t^2-nt+n-1 \geq 0$. Si ha allora $t \leq 1$ e $t \geq n-1$; d'altra parte $1 \leq t \leq n$. I valori possibili per t sono pertanto $t = 1$, $n-1$, n. Se $t = 1$, su ogni retta B_i, $i = 1, \ldots, n$, esistono almeno $(t+1=)$ 2 punti x_{i1}, x_{i2} tali che le rette corte per almeno uno di essi sono contenute in B_i. Sia ℓ_i la retta $\langle x_{i1}, x_{i2}\rangle$; risulta $\ell_i \subset B_i$ e dunque esiste un punto $z \in B_i \setminus \ell_i$. Le rette $\langle z, x_{i1}\rangle$ e $\langle z, x_{i2}\rangle$ sono corte, distinte tra loro e da ℓ_i e contenute in B_i. Ne segue $n^2+3n = b \geq n^2+1+n+1+3(n-1)$ da cui l'assurdo $n \leq 1$. Se $t = n-1$, in π si sono deformate due rette B_1 e B_2. Sia $y = B_1 \cap B_2$; le rette congiungenti un punto di $B_1 \setminus \{y\}$ e $B_2 \setminus \{y\}$ sono ordinarie e dunque non esistono rette corte di $(P, \mathcal{L})$ che intersecano in almeno due punti sia B_1 che B_2. Ne segue $n^2+3n = b \geq n^2+n-1+2(n+1) = n^2+3n+1$ il che è assurdo. Risulta quindi $t = n$; si è così provato il seguente

TEOREMA 2.12. *Un FLS $(P, \mathcal{L})$ con $v = n^2+n+1$ e $b = n^2+3n$, $n > 4$, dotato di al più un punto di grado $n+2$ si ottiene da un piano proiettivo di ordine n deformando una sua retta in uno spazio lineare $(P', \mathcal{L}')$ con $n+1$ punti e $2n$ rette.*

Supponiamo che esista in $(P, \mathcal{L})$ un punto x_0 di grado $n+2$. Ciò implica che in $(P', \mathcal{L}')$ il punto x_0 ha grado 2 e dunque i punti di P' si distribuiscono su due rette per x_0, ℓ, ed m. Denotato con h il numero dei punti di ℓ diversi da x_0 risulta $|\mathcal{L}'| = (n-h)h+2$ da cui si ricava che n^2-8n+8 è un quadrato k^2. Si vede facilmente che ciò è possibile solo per $k^2 = 1$ e cioè per $n = 7$.
Resta pertanto completamente dimostrato il Teorema II del n. 1.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BLOKHUIS - R.J.M. SCHMITT - H.A. WILBRINK: *On the number of lines in a linear space on p^2+p+1 points*, (Comunicazione al convegno Combinatorics '88 - Ravello).

[2] N.G. DE BRUIJN - P. ERDŐS: *On a combinatorial problem*, Indag. Math., **10**, (1948), 421-423.

[3] P. ERDŐS - J.C. FOWLER - W.T. SÓS - R.M. WILSON: *On 2-designs*, J. of Comb. Th., A, **38**, (1985), 131-142.

[4] H. HANANI: *On the number of straight lines determined by n points*, Riveon Lematematika, 5, (1951), 10-11.

[5] R.G. STANTON - J.C. KALBFLEISCH: *The $\lambda-\mu$ problem, $\lambda = 1$, $\mu = 3$*, "Proc. Second Chapel Hill Conf. on Combinatorics", Chapel Hill (1972), 451-462.

[6] S. VANSTONE: *The extendability of (r,1)-designs*, "Proc. Third Manitoba Conf. on Numerical Math.", (1973), 409-418.

Lavoro pervenuto alla redazione il 3 gennaio 1990
ed accettato per la pubblicazione il 26 aprile 1990
su parere favorevole di G. Tallini e di D. Olanda

INDIRIZZO DEGLI AUTORI:

Paola De Vito - Dipartimento di Matematica e applicazioni "R. Caccioppoli" - Università di Napoli "Federico II" - Via Mezzocannone 8 - 80134 Napoli - Italia

Pia Maria Lo Re - Dipartimento di Matematica e applicazioni "R. Caccioppoli" - Università di Napoli "Federico II" - Via Mezzocannone 8 - 80134 Napoli - Italia